Задачи к зачёту (12.11.2004)

0. Теоретические вопросы по выбору принимающего зачёт (по книжке, кроме топологических пространств). [Формулировки вопросов и оценки за них, а также сведения о принятых задачах, следует записывать на этом листке, записав на нём же фамилию сдающего зачёт.]

1. Непрерывная функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такова, что $x \mapsto f(f(x))$ имеет неподвижную точку. Следует ли отсюда, что f имеет неподвижную точку? (* А что будет в $\mathbb{R}^n$?)

2. Пусть
$$a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n) \cdot (2n+2)}.$$
Сходится ли ряд $\sum a_n$?

3. Доказать, что метод Ньютона итерационного отыскания корня для непрерывно дифференцируемых функций сходится, если начать достаточно близко от корня, в котором производная отлична от нуля.

4. Построить бесконечно дифференцируемую ненулевую функцию $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для которой $f(x) = 0$ при $x > 0$.

5. Докажите, что найдётся такое $x \in \mathbb{R}$, для которого последовательность
$$\operatorname{tg} x, \operatorname{tg}\operatorname{tg} x, \operatorname{tg}\operatorname{tg}\operatorname{tg} x, \ldots$$
всюду плотна в $\mathbb{R}$ (любое число является её предельной точкой).

6. Докажите, что если функция двух действительных переменных является многочленом от y при любом фиксированном x и является многочленом от x при любом действительном y, то она является многочленом от двух переменных.

7. Последовательность $a_1, a_2, \ldots$ такова, что при любом действительном $\gamma > 1$ подпоследовательность $a_{[\gamma^n]}$ сходится к нулю. (квадратные скобки в индексе обозначают целую часть). Докажите, что исходная последовательность сходится к нулю.

8. Функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дифференцируема всюду, $f(0) = 1$ и $f'(x) \geqslant f(x)$ при всех $x \geqslant 0$. Докажите, что $f(x) \geqslant e^x$ при $x \geqslant 0$.

9. Докажите, что число положительных действительных корней многочлена с действительными коэффициентами не превосходит числа его членов (то есть числа ненулевых коэффициентов).