Задачи к зачёту (19.11.2004)

0. Теоретические вопросы по выбору принимающего зачёт (по книжке, кроме топологических пространств). [Формулировки вопросов и оценки за них, а также сведения о принятых задачах, следует записывать на этом листке, записав на нём же фамилию сдающего зачёт.]

1. Существует ли функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которая на любом интервале принимает все действительные значения?

2. Найти наибольшую окружность, которая касается оси абсцисс в точке $(0, 0)$ и целиком находится в области $y \geqslant x^2$ (внутри параболы).

3. Связно ли пространство непрерывных функций $[0, 1] \to \mathbb{R}$, принимающих (хотя бы в одной точке) значение 0, в метрике равномерной сходимости (максимум модуля разности).

4. Рассмотрим пространство непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0, 1]$ функций (это означает, что они дифференцируемы на $(0, 1)$, а производная непрерывно продолжается на $[0, 1]$). Будем называть *нормой* такой функции величину

$$\|f\|_1 = \sup |f(x)| + \sup |f'(x)|$$

(по всем $x \in [0, 1]$). Докажите, что это пространство полно.

5. Пусть P_n — многочлен, приближающий функцию $x \mapsto |x|$ на отрезке $[-1, 1]$ с точностью до $1/n$ в метрике равномерной сходимости. Докажите, что степень многочлена P_n стремится к бесконечности при $n \to \infty$. (* Укажите явную нижнюю оценку для степени P_n.)

6. Докажите, что производная всюду дифференцируемой функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ принимает все промежуточные значения (если она где-то равна a и b, а $a < c < b$, то есть точка, где она равна c).