# Задачи к зачёту (26.11.2004)

0. Теоретические вопросы по выбору принимающего зачёт (по книжке, кроме топологических пространств). [Формулировки вопросов и оценки за них, а также сведения о принятых задачах, следует записывать на этом листке, записав на нём же фамилию сдающего зачёт.]

1. (а) Непрерывна ли функция $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, для которой $f(0) = 0$ и $f(x) = x\sin(1/x)$ при $x \neq 0$? (б) Дифференцируема ли она на $(-1,1)$? (в) Можно ли её представить в виде разности двух возрастающих (на $[-1,1]$) функций?

2. Рассмотрим функцию

$$H(p) = -p\log p - (1-p)\log(1-p)$$

при $p \in (0,1)$. (а) Продолжается ли она до непрерывной функции на $[0,1]$? (б) Нарисуйте примерный график функции, отметив максимумы, минимумы и др.

3. Докажите, что многочлен

$$P(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

не имеет кратных корней.

4. Докажите, что не существует ненулевого многочлена $P(x,y)$, для которого (а) $P(x,e^x) = 0$ при всех $x$; (б) $P(x,\sin x) = 0$ при всех $x$.

5. Докажите, что при $0 < a_n < 1$ свойства

(1) $\sum a_i = +\infty$;

(2) $\prod_{i=1}^{N}(1+a_n) = +\infty$ (бесконечное произведение понимается как предел конечных произведений);

(3) $\prod_{i=1}^{N}(1-a_n) = 0$

равносильны.

6. (а) Покажите, что любая периодическая с периодом $2\pi$ непрерывная функция на прямой равномерно приближается тригонометрическими многочленами (линейными комбинациями функций $\sin nx$ и $\cos nx$ при всех $n \in \mathbb{N}$). (б) Можно ли ограничиться одними косинусами? (в) Можно ли не использовать функцию $\sin x$ (разрешая все остальные синусы и все косинусы указанного вида)?