Лекция 1

1. Введение

1. Компактные операторы и операторы с компактной резольвентой. Мы будем изучать спектральные свойства абстрактных линейных операторов, многочисленные конкретные примеры которых встречаются в различных задачах современного анализа.

Через H будем обозначать сепарабельное комплексное гильбертово пространство со скалярным произведением (x, y), как правило бесконечномерное. В примерах это $L_2(G)$ или $L_2(S)$, где G – область в $\mathbb{R}^n$ и S –поверхность, например, граница области G. Иногда будет рассматриваться шкала H^t гильбертовых пространств, например, соболевские пространства $H^t(G)$ или $H^t(S)$, в этих случаях $H^0 = L_2$. Несколько слов о соболевских пространствах мы скажем немного ниже. Удобной моделью для построения примеров будет также пространство l_2.

Нас будут интересовать операторы из двух классов.

1. Компактные (или вполне непрерывные) операторы A в H. Оператор A (действующий из одного пространства в другое) *компактен*, если переводит любую ограниченную последовательность векторов $\{x_n\}$ в компактную последовательность, т.е. содержащую фундаментальную подпоследовательность.

Компактные операторы, как и вообще все ограниченные операторы, считаются определенными на всем H. Для пространства всех ограниченных линейных операторов в H используется обозначение $B(H)$, а для пространства компактных операторов – обозначение $\mathfrak{S}^\infty(H)$.

Следует иметь в виду, что произведение ограниченного оператора на компактный компактно, что предел по операторной норме последовательности компактных операторов – компактный оператор и что линейный оператор компактен тогда и только тогда, когда он является пределом по операторной норме последовательности конечномерных операторов. См., например, [ЛС][1]. Впрочем, все это несложно проверяется. Оператор называется *конечномерным*, если его область значений конечномерна. Общий вид конечномерного оператора следующий:

$$Au = \sum_1^N (u, g_j) f_j, \tag{1}$$

здесь область значений натянута на f_j. Конечномерный оператор очевидным образом компактен. Общий компактный оператор "почти конечномерен" (выражение из [ЛС]).

Приведем примеры компактных операторов.

1). Интегральный оператор в $L_2(G)$

$$Au(x) = \int_G K(x, y) u(y)\, dy \tag{2}$$

[1] Это наиболее простая книга для справок по функциональному анализу и, в частности, теории операторов: Л.А. Люстерник и В.И. Соболев, "Элементы функционального анализа".

в ограниченной области G пространства $\mathbb{R}^n$, где ядро, скажем, непрерывно в $\overline{G}\times\overline{G}$ вне диагонали $x=y$ и имеет слабую (интегрируемую) особенность при $x=y$:

$$|K(x,y)| \le C|x-y|^{-\alpha}, \quad \alpha < n. \tag{3}$$

Для доказательства компактности такого оператора можно использовать ЛЕММУ ШУРА (см., например, [А II,6][2]):

Если для некоторого интегрального оператора в $L_2(G)$ с ядром $L(x,y)$ величины

$$M_1 = \sup_x \int_G |L(x,y)|\,dy \;\; и \;\; M_2 = \sup_y \int_G |L(x,y)|\,dx \tag{4}$$

конечны, то это ограниченный оператор с нормой, не превосходящей $\sqrt{M_1M_2}$.

Если имеет место оценка (3), то, пользуясь этой леммой, можно разложить интегральный оператор (2) сначала в сумму непрерывного ядра и ядра с малыми M_1 и M_2. Непрерывное ядро можно сколь угодно точно равномерно аппроксимировать полиномиальным, а полиномиальному по x,y ядру отвечает конечномерный оператор. Получим, что наш оператор – предел последовательности конечномерных операторов по операторной норме.

2). В пространстве l_2 последовательностей $x=\{\xi_k\}_1^\infty$ рассмотрим оператор с диагональной матрицей

$$\mathrm{diag}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots). \tag{5}$$

Для компактности такого оператора необходимо и достаточно, чтобы

$$\alpha_n \to 0. \tag{6}$$

Слушателям рекомендуется проводить пропускаемые доказательства или хотя бы находить их в литературе.

2. Неограниченные операторы A со следующими свойствами: 1) Область определения $D(A)$ плотна в H. 2) Оператор A замкнут, т. е. имеет замкнутый график в $H\times H$. 3) При некотором λ *резольвента*

$$R_A(\lambda) = (A-\lambda I)^{-1} \tag{7}$$

существует и является компактным оператором в H. Такой оператор A называется *оператором с компактной резольвентой.*

Пример: оператор A, отвечающий задаче Дирихле

$$\Delta u(x) = f(x) \quad (x\in G), \quad u(x) = 0 \quad (x \in S) \tag{8}$$

в ограниченной области $G\subset\mathbb{R}^n$ с гладкой границей S.

Приведем пояснения.

[2]Лекции М.С., выложенные на сайте www.agranovich.nm.ru и сайте НМУ, семестр II (Эллиптические ПДО, первая часть), лекция 6.

Здесь рассматривается пространство $L_2(G) = H^0(G)$. Оно содержится в шкале соболевских пространств $H^t(G)$, $t \geq 0$ (см., например, [А I[3], 10-13]). При натуральном t *пространство* $H^t(G)$ определяется как пополнение пространства $C_b^t(G)$ функций в G, непрерывных и ограниченных с производными до порядка t включительно, по интегральной норме, определяемой равенством

$$||u||_{t,G}^2 = \int_G \sum_{|\alpha| \leq t} |\partial^\alpha u(x)|^2 dx. \tag{9}$$

Здесь $|\alpha|$ – порядок частной производной $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}$, $\partial_j = \partial/\partial x_j$. Элементы этого пространства – квадратично интегрируемые функции с квадратично интегрируемыми производными в смысле обобщенных функций, и эта норма сохраняет смысл для всех элементов из $H^t(G)$. При росте t пространство $H^t(G)$ сужается; из ограниченности области G можно вывести (это непросто), что при $t_1 < t_2$ пространство $H^{t_2}(G)$ компактно вложено в $H^{t_1}(G)$.

Функции из $H^t(G)$ имеют след (граничное значение) на $\partial G = S$ в $H^{t-1/2}(S)$ при $t > 1/2$. При этом переход к следу – ограниченный оператор из $H^t(G)$ в $H^{t-1/2}(S)$.

Область определения оператора, отвечающего задаче (8), – подпространство в $H^2(G)$, выделяемое условием равенства следа функции на S нулю. Интегрируя по частям, легко проверить, что

$$(\Delta u, v)_G = (u, \Delta v)_G \tag{10}$$

для функций из $C_0^2(\overline{G})$. Это значит, что наш оператор "формально самосопряженный". Отсюда выводится, что это самосопряженный оператор в $L_2(G)$:

$$(Au, v)_G = (u, Av)_G \ \text{ для всех } \ u, v \in D(A). \tag{11}$$

Если λ невещественно, то отсюда следует, что оператор $A - \lambda I$ имеет ограниченный обратный (см., например, [АГ][4], п. 48). Последний действует из $H^0(G)$ в $H^2(G)$ и потому компактен.

Приведем некоторые определения. *Резольвентное множество* оператора A – множество всех таких λ на комплексной плоскости, что существует резольвента (7) (ограниченный оператор). Дополнение $\sigma(A)$ к резольвентному множеству называется *спектром* оператора A.

Предложение 1. *Пусть* $\lambda_0 \in \rho(A)$ *и* $C_0 = ||R_A(\lambda_0)||$. *Тогда* $\rho(A)$ *содержит круг*

$$\{\lambda : |\lambda - \lambda_0| C_0 < 1\} \tag{12}$$

и в нем

$$||R_A(\lambda)|| \leq \frac{C_0}{1 - |\lambda - \lambda_0| C_0}. \tag{13}$$

[3] Лекции М.С., Обобщенные функции и пространства Соболева.

[4] Н.И. Ахиезер и И.М. Глазман, Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве.

При этом резольвента разлагается в этом круге в ряд по неотрицательным целым степеням $\lambda-\lambda_0$ – так называемый ряд Неймана:

$$R_A(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^k R_A(\lambda_0)^{k+1}. \tag{14}$$

Доказательство. Имеем

$$A-\lambda I=(A-\lambda_0 I)[I-(\lambda-\lambda_0)R_A(\lambda_0)].$$

При указанных λ существует

$$R_A(\lambda)=[I-(\lambda-\lambda_0)R_A(\lambda_0)]^{-1}R_A(\lambda_0),$$

так как оператор в квадратных скобках разлагается в геометрическую прогрессию из операторов $(\lambda-\lambda_0)^\nu R_A(\lambda)^\nu$, сходящуюся по операторной норме. □

Следствие. *Резольвентное множество открыто, спектр замкнут.*

Число λ называется *собственным значением* оператора A, если $(A-\lambda I)u=0$ при некотором ненулевом векторе u, он называется *собственным вектором*, отвечающим этому собственному значению. Собственные векторы, отвечающие собственному значению λ, вместе с нулевым вектором 0 образуют *линеал* (т.е. множество, в котором возможны линейные операции), будем обозначать его $L_A(\lambda)$. Если λ – собственное значение, то может оказаться, что линеал собственных векторов содержится в более широком линеале корневых векторов, состоящем из корневых векторов и нуля; обозначим его через $N_A(\lambda)$. *Корневой вектор* – это такой ненулевой вектор u, что $(A-\lambda I)^\nu u=0$ при некотором натуральном ν. Минимальное $\nu=\nu(u)$ назовем *порядком* корневого вектора u. Замкнутый линеал называется *подпространством*. Если $N_A(\lambda)$ конечномерно, то это подпространство корневых векторов и $L_A(\lambda)$ – подпространство собственных векторов, так как в этом случае они очевидным образом замкнуты. Размерности подпространств $L_A(\lambda)$ и $N_A(\lambda)$ называются соответственно *геометрической кратностью* и *алгебраической кратностью* собственного значения λ. Числа $1/\lambda$, обратные к ненулевым собственным значениям λ данного оператора, называются его *характеристическими числами*.

Корневые векторы, не являющиеся собственными, называются *присоединенными*. Если оператор A самосопряженный, т.е. выполнено условие

$$(Au,v)=(u,Av)\quad (u,v\in D(A)), \tag{15}$$

то собственные значения вещественны и присоединенных векторов нет. Действительно, здесь первое утверждение моментально проверяется (вообще, как мы уже отметили, все точки спектра самосопряженного оператора вещественны), проверим второе. Если, например, $(A-\lambda I)u=v$, $(A-\lambda I)v=0$, то из (15) при вещественном λ следует, что

$$(v,v)=((A-\lambda I)u,(A-\lambda I)u)=(u,(A-\lambda I)^2u)=0,$$

так что $v = 0$. Это рассуждение легко обобщается на произвольные присоединенные векторы (проверьте самостоятельно).

Известна следующая теорема:

Теорема 2. *Спектр компактного оператора состоит из нуля и не более чем счетного множества ненулевых изолированных собственных значений конечной алгебраической кратности; если их множество счетно, то они не имеют конечных точек накопления.*

Эта теорема по существу доказана в [ЛС], гл. 6, §2; ее можно найти и в других книгах. Мы приведем пояснения и наметим доказательство.

Пусть λ – ненулевое собственное значение компактного оператора A. Обозначим через N_ν ядро (пространство нулей) оператора $(A - \lambda I)^\nu$. (Оно линейно и замкнуто: пространство нулей любого ограниченного оператора замкнуто.) Оно конечномерно: это следует из того, что $(A-\lambda I)^\nu = A_1 - \mu I$, где $\mu \neq 0$ (и можно воспользоваться одним из результатов теории Ф. Рисса для абстрактных фредгольмовых уравнений 2-го рода). Если есть присоединенные векторы, то при каждом увеличении ν на единицу это пространство сначала расширяется, но это происходит до некоторого значения ν, начиная с которого оно перестает меняться; N_ν с этим ν и есть корневое подпространство, и оно конечномерно.

Для доказательства стабилизации нужна лемма:

Лемма. *Пусть X и Y – два подпространства в линейном нормированном пространстве, причем X – правильная часть в Y. Тогда в Y найдется такой элемент y с единичной нормой, что $||y-x|| \geq 1/2$ для всех x из X.* (Здесь $1/2$ можно заменить любым числом, меньшим 1.)

Предположив, что стабилизация не наступает, и используя эту лемму, можно построить последовательность единичных векторов $x_\nu \in N_{\nu+1} \setminus N_\nu$, которую оператор A не переводит в компактную последовательность.

Итак, каждому ненулевому собственному значению отвечает конечномерное корневое подпространство. Все эти собственные значения лежат в круге

$$O_R = \{\lambda : |\lambda| \leq R\}$$

с центром в начале радиуса $R = ||A||$ (последнее верно для любого ограниченного оператора). Если предположить, что их бесконечно много вне круга O_r меньшего радиуса, то снова строится последовательность единичных векторов (это собственные векторы), которую оператор не переводит в компактную.

Теперь следует вспомнить, что для уравнения $(A - \lambda I)u = f$ с ненулевым λ справедлива альтернатива Фредгольма, поэтому если оно не является однозначно разрешимым при любом f, то λ – собственное значение. Если же есть однозначная разрешимость, то оператор $(A-\lambda I)^{-1}$ ограничен по теореме Банаха об обратном операторе.

Остается разобраться с точкой 0. Так как произведение компактного оператора на ограниченный оператор компактно, то компактный оператор A не может иметь ограниченного обратного (в бесконечномерном пространстве). Поэтому нуль – всегда точка спектра компактного оператора. $\square$

Но нуль – не обязательно собственное значение (пример – оператор с диагональной матрицей в l_2 с ненулевыми стремящимися к нулю числами на главной диагонали). Это может быть собственное значение бесконечной геометрической кратности и не изолированное собственное значение (постройте примеры в l_2).

Компактные операторы без ненулевых собственных значений называются *вольтерровыми.* Примеры в l_2 легко строятся. Можно взять матрицу с клетками

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha_m \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (m = 1, 2, \dots)$$

вдоль главной диагонали, где $\alpha_m \to 0$.

Сделаем еще следующее замечание.

Напомним, что оператор A (ограниченный или замкнутый) из пространства H в пространство $\widetilde{H}$ называется *фредгольмовым*, если он имеет конечномерное ядро KerA и конечномерное коядро $\operatorname{Coker} A = \widetilde{H}/AD(A)$. Из этих предположений можно вывести замкнутость области значений оператора A. (См., например, [Ш][5], §8 в случае ограниченного оператора. Не будет ошибкой просто предположить, что она замкнута.)

Точку λ на комплексной плоскости назовем *точкой существенного спектра* для оператора A в H, если оператор $A - \lambda I$ не является фредгольмовым. Мы хотим отметить, что 0 *является точкой существенного спектра компактного оператора A в бесконечномерном пространстве.* Действительно, если A имеет конечномерное ядро и бесконечномерную замкнутую область значений, то его сужение A_1 на ортогональное дополнение $H_1 = (\operatorname{Ker} A)^\perp$ к ядру взаимно однозначно и непрерывно отображает это подпространство на область значений оператора A, так что по теореме Банаха есть обратный оператор A_1^{-1}. Но единичный оператор $I = A_1^{-1}A_1$ в H_1 опять-таки некомпактен.

Ненулевые собственные значения компактного оператора не принадлежат существеного спектру в силу теорем теории Рисса. Поэтому существенный спектр компактного оператора состоит из единственной точки 0.

Эллиптический ПДО отрицательного порядка t на замкнутой гладкой поверхности S компактен в $L_2(S)$, он фредгольмов как оператор из $H^0(S)$ в $H^{|t|}(S)$, и там его область значений замкнута, но в $L_2(S)$ она незамкнута.

Закрывая глаза на точные определения, иногда компактный оператор считают оператором с дискретным спектром.

Пример ограниченного (но некомпактного) оператора с обширным существенным спектром – ПДО A нулевого порядка в $L_2(S)$ на замкнутой гладкой поверхности S. (Очень близки к таким операторам сингулярные интегральные операторы на S.) Если $a(x,\xi)$ – его главный символ, то главный символ ПДО $A - \lambda I$ равен $a(x,\xi) - \lambda$. Так как эллиптичность (необращение главного символа в нуль) эквивалентна фредгольмовости оператора A в $L_2(S)$ [A II,9-10], то его существенный спектр совпадает с множеством значений главного символа $a(x,\xi)$. Эти операторы останутся за рамками нашего курса.

---

[5] М.А. Шубин, Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория