Лекция 10

2. Свойства следа. В этом пункте нам понадобится следующая лемма, которую можно было доказать раньше. Напомним, что вольтерров оператор – это компактный оператор, не имеющий ненулевых собственных значений.

Лемма. *Пусть T – компактный оператор и $C(T)$ – линейная замкнутая оболочка его корневых векторов, отвечающих ненулевым собственным значениям. Обозначим через $P = P_T$ ортопроектор на $C(T)$ и через $Q = Q_T$ дополнительный ортопроектор $I - P_T$. Тогда QTQ – вольтерров оператор.*

Доказательство. Здесь предполагаем, что $C(T)$ не совпадает с H, так как иначе доказывать нечего. Попутно мы отметим еще несколько полезных утверждений, они будут выделены курсивом.

Пусть λ_j $(j = 1, 2, \dots)$ – все ненулевые собственные значения оператора T, так что $\overline{\lambda}_j$ – все ненулевые собственные значения оператора T^*. В лекции 4 было отмечено, что корневые пространства $N_{T^*}(\overline{\lambda}_j)$ имеют прямые дополнения $M_{T^*}(\overline{\lambda}_j)$, ортогональные дополнения к которым совпадают с корневыми подпространствами $N_T(\lambda_j)$:

$$H = N_{T^*}(\overline{\lambda}_j) \dotplus M_{T^*}(\overline{\lambda}_j), \quad N_T(\lambda_j) = (M_{T^*}(\overline{\lambda}_j))^\perp. \tag{*}$$

Обозначим через M пересечение всех подпространств $M_{T^*}(\overline{\lambda}_j)$. Вектор f принадлежит этому пересечению тогда и только тогда, когда он ортогонален всем $N_T(\lambda_j)$. Отсюда ясно, что $M = C(T)^\perp$ и что Q – это ортопроектор на M.

Если некоторое подпространство C инвариантно относительно оператора T, то его ортогональное дополнение $C^\perp$ инвариантно относительно оператора T^*. Это легко проверяется при помощи ортопроекторов: если C инвариантно относительно T, то для ортопроектора P на C имеем $PTP = TP$ (но перестановочности $PT = TP$, вообще говоря, нет!), отсюда для $Q = I - P$ имеем $QTP = 0$, так что $PT^*Q = 0$ (как оператор, сопряженный к нулевому), или $QT^*Q = T^*Q$, т.е. $C^\perp$ инвариантно относительно T^*.

Поэтому $M = C(T)^\perp$ *инвариантно относительно оператора T^*.* Ясно также, что *сужение $QT^*Q = T^*Q$ оператора T^* на M – вольтерров оператор*: см. первое соотношение в (*).

Оператор, сопряженный к вольтеррову, вольтерров. Это очевидно.

Поэтому получаем, что QTQ – вольтерров оператор. $\square$

Ограниченный оператор T называют *оператором с конечным матричным следом*, если для любого ортонормированного базиса $\{g_j\}$ величина

$$\sum (Tg_j, g_j) \tag{15}$$

конечна. Для оператора в конечномерном пространстве это след его матрицы в этом базисе, и он равен сумме собственных значений. Оказывается, что это верно и в бесконечномерном пространстве:

Теорема 5. *Оператор T имеет конечный матричный след тогда и только тогда, когда он ядерный, и в этом случае величина* (15) *всегда совпадает с его спектральным следом* $\operatorname{tr} A$.

Доказательство проведем, предполагая для экономии времени оператор T компактным. Оно состоит из нескольких пунктов. В основном мы следуем [ГК].

1. *Пусть компактный оператор T неотицателен и величина* (15) *в некотором ортонормированном базисе конечна. Тогда это ядерный оператор и эта величина* (15) *равна* $\operatorname{tr} T$.

Действительно, пусть величина (15) конечна в некотором ортонормированном базисе, и пусть $\{e_j\}$ – ортонормированный базис из собственных векторов оператора T. Тогда

$$\begin{aligned}\sum (Tg_j, g_j) &= \sum \|T^{1/2} g_j\|^2 = \sum_j \sum_k |(T^{1/2} g_j, e_k)|^2 \\ &= \sum_k \sum_j |(T^{1/2} e_k, g_j)|^2 = \sum_k \|T^{1/2} e_k\|^2 = \\ &= \sum (Te_k, e_k) = \sum \lambda_k(T). \quad \square\end{aligned}$$

2. *Пусть T – оператор с конечным матричным следом. Тогда ряд* (15) *сходится абсолютно.*

Действительно, при перестановке элементов ортнормированного базиса он остается ортонормированным базисом, поэтому ряд (15) сходится безусловно, а значит, абсолютно. $\square$

3. *Любой компактный оператор с конечным матричным следом является ядерным оператором.*

Действительно, рассмотрим сначала самосопряженный оператор T. Возьмем ортонормированный базис $\{g_j\}$ из его собственных векторов, $Tg_j = \lambda_j g_j$. Тогда

$$\sum (Tg_j, g_j) = \sum \lambda_j$$

и этот ряд сходится абсолютно, а модули собственных значений – это s-числа оператора T. Значит, T – ядерный оператор.

Теперь пусть T – любой компактный оператор с конечным матричным следом. Тогда конечный матричный след имеют T^* и как следствие $\operatorname{Re} T$ и $\operatorname{Im} T$. По доказанному это ядерные операторы. Значит, оператор $T = \operatorname{Re} T + i \operatorname{Im} T$ тоже ядерный. $\square$

4. *Пусть T – ядерный оператор. Тогда он имеет конечный матричный след и величина* (15) *не зависит от выбора ортонормированного базиса.*

Действительно, пусть T – ядерный оператор и

$$Tu = \sum s_k (u, e_k) f_k \tag{16}$$

– его разложение Шмидта. Для любого ортонормированного базиса $\{g_j\}$ из (16) получаем

$$(Tg_j, g_j) = \sum_k s_k(g_j, e_k)(f_k, g_j).$$

В силу неравенства Шварца

$$\sum_k \sum_j s_k |(g_j, e_k)||(f_k, g_j)| \leq \sum s_k \|e_k\| \|f_k\| = \sum s_k,$$

так как e_k и f_k – единичные векторы. Получаем

$$\sum |(Tg_j, g_j)| \leq \sum s_k. \tag{17}$$

Этим показано, что T имеет конечный матричный след.

Далее,

$$\sum (Tg_j, g_j) = \sum_k \sum_j s_k(g_j, e_k)(f_k, g_j) = \sum s_k(f_k, e_k)$$

в силу равенства Парсеваля. Правая часть не зависит от базиса $\{g_j\}$. □

Теперь величину (15) можно называть *матричным следом* оператора T. Временно позволим себе обозначать его через $\operatorname{Sp} T$. Заметим, что в случае любого самосопряженного оператора T уже получается, что он равен $\operatorname{tr} T$ (см. начало доказательства в п. 3).

Следующее утверждение полезно и само по себе.

5. *Пусть T – компактный оператор, B – ограниченный оператор и операторы BT и TB ядерные. Тогда их матричные следы совпадают*:

$$\operatorname{Sp}(BT) = \operatorname{Sp}(TB). \tag{18}$$

Для доказательства снова используем разложение Шмидта (16). Из него следует, что

$$BTu = \sum s_k(u, e_k)Bf_k$$

и

$$\operatorname{Sp}(BT) = \sum (BTe_k, e_k) = \sum s_k(Bf_k, e_k). \tag{19}$$

С другой стороны,

$$TBu = \sum s_k(Bu, e_k)f_k$$

и

$$\operatorname{Sp}(TB) = \sum (TBf_k, f_k) = \sum s_k(Bf_k, e_k). \tag{20}$$

Мы видим, что правые части в (19) и (20) совпадают. □

6 (В.Б. Лидский). *Матричный след любого ядерного оператора совпадает с его спектральным следом.*

Доказательство. Сначала мы сведем доказательство этого утверждения к доказательству того, что матричный след вольтеррова ядерного оператора равен нулю.

Пусть $C(T)$ – линейная замкнутая оболочка корневых операторов ядерного оператора T, P – ортопроектор на $C(T)$ и $Q = I - P$. Мы имеем

$$T = PTP + QTP + PTQ + QTQ. \tag{21}$$

Все слагаемые справа – ядерные операторы. Матричный след обладает свойством линейности. Пространство PH инвариантно относительно T. Поэтому справа в (21) второе слагаемое равно нулю. Третье слагаемое имеет нулевой матричный след (используем п. 5):

$$\mathrm{Sp}(PTQ) = \mathrm{Sp}(TQP) = 0.$$

Четвертое слагаемое – вольтерров оператор в силу леммы, и если мы докажем, что его матричный след равен нулю, то окажется, что матричный след оператора T совпадает с матричным следом первого слагаемого. Последний легко вычисляется в базисе Шура: он равен $\mathrm{tr}\, T$.

Итак, осталось доказать, что матричный след вольтеррова ядерного оператора равен нулю. Это наиболее сложная часть доказательства. Через T теперь обозначается ядерный вольтерров оператор. После изрядной подготовки мы предположим, что его матричный след отличен от нуля, и приведем это предположение к противоречию.

Пусть $\{g_n\}_1^\infty$ – ортонормированный базис в H. Обозначим через P_n ортопроектор на линейную оболочку первых векторов $g_1, \ldots, g_n$ и через Q_n дополнительный ортопроектор на замкнутую линейную оболочку остальных векторов $g_{n+1}, \ldots$. Пусть T – компактный оператор; известно, что тогда $\|Q_nT\| \to 0$ при $n \to \infty$ (см. [ЛС]). По той же причине и $\|TQ_n\| = \|Q_nT^*\| \to 0$. Отсюда следует, что

$$\|T_n - T\| \to 0, \quad \text{где} \quad T_n = P_nTP_n. \tag{22}$$

Очевидно, что $\|T_n\| \leq \|T\|$. Поэтому все собственные значения оператора T_n содержатся в круге радиуса $\|T\|$. Обозначим их через $\lambda_j^{(n)}$, как всегда, считая их упорядоченными в порядке невозрастания модулей с учетом кратностей; $n = 1, 2, \ldots, n$. Через $s_j^{(n)}$ обозначим s-числа этого оператора.

Проверим, что для вольтеррова оператора T

$$\lambda_1^{(n)} \to 0 \quad (n \to \infty). \tag{23}$$

Для этого рассмотрим кольцо $\{z : \varepsilon \leq |\lambda| \leq \|T\|\}$ с малым $\varepsilon > 0$. В нем

$$T_n - \lambda I = (T - \lambda I)[I - (T - \lambda I)^{-1}(T - T_n)].$$

Так как $\|(T - \lambda I)^{-1}\|$ – равномерно ограниченная функция от λ, то из (22) следует, что оператор $T_n - \lambda I$ обратим при рассматриваемых λ, если n достаточно велико. Значит, все собственные значения оператора $T^{(n)}$ при больших n лежат в кружке радиуса ε с центром в начале.

Пусть T – ядерный вольтерров оператор. Используя взятый базис $\{g_n\}$, мы видим, что

$$\operatorname{Sp} T_n \to \operatorname{Sp} T. \tag{24}$$

Теперь мы рассмотрим функцию

$$D_n(\lambda) = \prod_{j=1}^{n} (1 + \lambda\lambda_j^{(n)}). \tag{25}$$

Ее логарифмическая производная (производная логарифма) имеет вид

$$\frac{D_n'(\lambda)}{D(\lambda)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j^{(n)}}{1 + \lambda\lambda_j^{(n)}}. \tag{26}$$

Будет показано, что

$$\frac{D_n'(\lambda)}{D_n(\lambda)} \to \operatorname{Sp} T \quad (n \to \infty) \tag{27}$$

равномерно в любой ограниченной области.