Лекция 12

Это виртуальная “лекция”, ее не было, на самом деле это набросок части первой лекции в будущем семестре.

Замечание 1. Одной непрерывности ядра интегрального оператора недостаточно для его ядерности. Пример строится в пространстве $L_2(S)$ на единичной окружности S. Рассматривается оператор

$$Tu(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)u(y)\,dy,$$

где функции $f(x)$ и $u(x)$ 2π-периодичны. Известно, что существует непрерывная вещественная функция f, ряд Фурье которой по системе $\{e^{ikx}\}$ не является всюду сходящимся. Это самосопряженный оператор с собственными функциями e^{ikx} и собственными значениями, равными коэффициентам Фурье функции f по этой системе. Ряд из модулей этих коэффициентов не может абсолютно сходиться, так что оператор не является ядерным.

Используя этот пример, легко построить пример аналогичного оператора на n-мерном торе.

Замечание 2. В книге Агмона (1965) есть еще такая теорема: *Пусть T_1 и T_2 – интегральные операторы в области G пространства $\mathbb{R}^n$ с квадратично интегрируемыми ядрами $K_1(x,y)$ и $K_2(x,y)$, и пусть $T = T_1T_2$, это интегральный оператор с ядром*

$$K(x,y) = \int_G K_1(x,z)K_2(z,y)\,dz. \tag{8}$$

Тогда $K(x,x)$ существует при почти всех x и

$$\operatorname{tr} T = \int_G K(x,x)\,dx. \tag{9}$$

Добавим, что любой ядерный оператор можно (разными способами) представить в виде произведения двух операторов Гильберта–Шмидта (используя, например, квадратный корень из неотрицательного сомножителя в полярном представлении).[1]

Замечание 3. Всякий ядерный оператор в L_2, как уже говорилось, является оператором Гильберта–Шмидта и, следовательно, может быть записан как интегральный оператор с квадратично интегрируемым ядром. Конечно, это ядро определено с точностью до изменений на множестве нулевой меры. Теорема Агмона показывает, что можно регуляризовать это ядро (подправить его на множестве нулевой меры) так, что будет справедлива формула (9).

Но более естественной выглядит следующая формула (см. обозначения в предыдущей лекции):

[1] Ср. с Добавлением 3 в книге Шубина по ПДО. Он, видимо, не знал теоремы Агмона.

Теорема. *Для любого ядерного оператора*

$$\operatorname{tr} T = \lim_{h\to 0} \int_G K_h(x,x)\,dx. \tag{10}$$

Доказательство. Как отмечалось в предыдущей лекции, ядро оператора T_h непрерывно, поэтому его след вычисляется как интеграл под знаком предела, а при $h \to 0$ этот след стремится к следу оператора T, что тоже отмечалось. $\square$

Не обстоит ли, однако, дело так, что если интегральный оператор ядерный, то его ядро можно сделать непрерывным, изменив его на множестве нулевой меры? Я не очень в это верю. Если это неверно, то хотелось бы посмотреть на пример. Вряд ли он строится легко.

5. Другие результаты. Теорема 2 в п. 3 показывает, в частности, что пространство, сопряженное к $\mathfrak{S}_2$, можно отождествить с $\mathfrak{S}_2$. Следующая теорема показывает, что при $p \geq 1$ пространство, сопряженное к $\mathfrak{S}_p$, можно отождествить с $\mathfrak{S}_q$, где

$$p^{-1} + q^{-1} = 1. \tag{8}$$

Здесь ситуация совершенно аналогична известной для пространств l_p и $L_p(G)$.

Обозначим через $\mathfrak{S}_0$ пространство всех конечномерных операторов. Величину $|T|_\infty$ для любого оператора из $\mathfrak{S}_\infty$, т.е. для любого компактного оператора, определим равенствами

$$|T|_\infty = \max |s_j(T)| = s_1(T) = \|T\|. \tag{9}$$

Теорема. *Пусть* $1 \leq p \leq \infty$ *и* q *связано с* p *соотношением* (8). *Тогда для* $T \in \mathfrak{S}_p$

$$|T|_p = \sup_{S\in\mathfrak{S}_0} \frac{\operatorname{Sp}(TS)}{|S|_q}. \tag{10}$$

2. *При тех же* p *и* q, *если* $T \in \mathfrak{S}_p$ *и* $S \in \mathfrak{S}_q$, *то*

$$|TS|_1 \leq |T|_p |T|_q. \tag{11}$$

Доказательство откладываем до следующего семестра, приведем только следующие пояснения. Достаточно рассматривать конечномерные операторы, что позволяет считать H конечномерным пространством. Далее, можно предположить, что операторы обратимы. В этом случае используются полярные представления.

В качестве следствий получаются уточнения неравенств, которые доказаны раньше. Приведенное ниже неравенство (12) сразу следует из (10), проверку неравенства (13) опустим.

Следствия.

1. *При* $1 \leq p \leq \infty$ *имеет место неравенство треугольника*

$$|T_1 + T_2|_p \leq |T_1|_p + |T_2|_p \quad (T_1, T_2 \in \mathfrak{S}_p). \tag{12}$$

2 (обобщение неравенства (11)). Если

$$p^{-1} = p_1^{-1} + p_2^{-2} \quad (p, p_1, p_2 \geq 1),$$

то

$$|TS|_p \leq |T|_{p_1} |S|_{p_2}. \tag{13}$$

6. Классы Бирмана–Соломяка. В работах М.Ш. Бирмана и М.З. Соломяка (см. их обзор в УМН, 1977, N 1) и работах других авторов используются более общие классы компактных операторов. Из них мы упомянем класс $\mathfrak{S}_{p,\infty}$, выделяемый условием

$$\sup k^{1/p} s_k(T) < \infty. \tag{14}$$

Если оператор на n-мерной поверхности S или в ограниченной области G пространства $\mathbb{R}^n$ действует ограниченным образом из H^0 в H^m, то он принадлежит этому классу с $p = n/m$, и здесь поведение s-чисел улавливается более точно, чем при использовании классов Неймана–Шаттена $\mathfrak{S}_{\widetilde{p}}$, $\widetilde{p} > p$. Величина (14) является квазинормой. При $p \geq 1$ есть эквивалентная норма; но на этом не будем останавливаться.