Лекция 2

Перейдем к операторам с компактной резольвентой.

Теорема 3. *Спектр оператора с компактной резольвентой состоит из конечного или счетного множества изолированных собственных значений конечной алгебраической кратности, которые не имеют конечных точек накопления. Резольвента компактна при всех* λ *из резольвентного множества.*

Спектр такого типа называется *дискретным*, поэтому операторы с компактной резольвентой называют также *операторами с дискретным спектром.* Но этот термин несколько менее удачен. Лучше говорить, что спектр такого оператора дискретен.

Доказательство теоремы. Так как из данного оператора можно вычесть $\lambda_0 I$, то предположим, не ограничивая общности, что оператор A имеет компактный обратный $T = A^{-1}$. Конечно, у этого оператора нуль не является собственным значением. Пусть λ – ненулевое число. Рассмотрим уравнения

$$(A - \lambda I)u = 0 \ \text{ и } \ (T - \mu I)u = 0, \ \text{ где } \ \mu = 1/\lambda.$$

Если u – решение второго уравнения, то $u \in D(A)$ (так как $Tu = \mu u$) и, действуя на это уравнение оператором A, получаем, что u – решение первого уравнения. И наоборот, решение первого уравнения является решением второго. Таким образом, λ – собственное значение оператора A тогда и только тогда, когда μ – собственное значение оператора T. Значит, A имеет конечное или счетное множество собственных значений, и во втором случае они стремятся к бесконечности.

Теперь предположим, что λ – не собственное значение оператора A. Тогда оператор $T - \mu I$ имеет ограниченный обратный и оператор $A - \lambda I$ имеет (двусторонний) ограниченный обратный

$$R_A(\lambda) = T(I - \lambda T)^{-1}. \tag{16}$$

Действительно, например,

$$(A - \lambda I)T(I - \lambda T)^{-1} = (I - \lambda T)(I - \lambda T)^{-1} = I.$$

Таким образом, спектр оператора A состоит из его собственных значений. Оператор (16) компактен как произведение компактного оператора на ограниченный.

Если снова λ – собственное значение оператора A, то уравнения

$$(A - \lambda I)^\nu u = 0 \ \text{ и } \ (T - \mu I)^\nu u = 0, \quad \lambda = 1/\mu,$$

эквивалентны. Например, пусть $(T - \mu I)^2 u = 0$. Тогда

$$\begin{aligned}(T^2 - 2\mu T - \mu^2 I)u = 0, &\quad u \in D(A),\\ (T - 2\mu I - \mu^2 A)u = 0, &\quad Au \in D(A),\\ (I - 2\mu A - \mu^2 A^2)u = 0, &\quad (A - \lambda I)^2 u = 0.\end{aligned}$$

В частности, это означает совпадение корневых подпространств $N_A(\lambda)$ и $N_T(\mu)$. $\square$

Очевидно, что существенного спектра у оператора с компактной резольвентой нет.

Вместо резольвенты компактного оператора T часто рассматривают *модифицированную резольвенту* $R_T^{(m)}(\lambda)$ – оператор справа в (16). Если $T = A^{-1}$, где A – оператор с дискретным спектром, то это резольвента $R_A(\lambda)$.

Из теоремы 3 следует, в частности, что для самосопряженного оператора с компактной резольвентой при невещественном λ резольвента $R_A(\lambda)$ существует и компактна.

Предложение 1 показывает, что резольвента компактного оператора – регулярная (т.е. однозначная аналитическая) функция от λ вне его собственных значений и нуля: она локально разложима в степенной ряд, сходящийся по операторной норме. Модифицированная резольвента регулярна вне характеристических чисел. Как следствие резольвента (16) оператора A с дискретным спектром тоже регулярна вне его собственных значений.

Неограниченные операторы с более сложным спектром, встречающиеся в квантовой механике, мы не будем рассматривать.

2. Инвариантные подпространства и проекторы Ф. Рисса. Подпространство H_1 в H называется *инвариантным* относительно ограниченного оператора A, если из $x \in H_1$ следует $Ax \in H_1$. В случае неограниченного оператора A это условие относится только к векторам из $D(A)$ в H_1.

Корневое подпространство оператора A – пример инвариантного подпространства. Матрица оператора A в нем (в любом базисе) имеет жордановы клетки в своей жордановой форме, если это не собственное подпространство. Если A – неограниченный оператор, то оно входит в $D(A)$.

Если H_1 – инвариантное относительно данного оператора подпространство, то в общем случае не обязательно существует другое инвариантное подпространство H_2, такое, что

$$H = H_1 \dot{+} H_2. \tag{1}$$

Пример: конечномерное пространство, в котором жорданова форма матрицы оператора – жорданова клетка; H_1 - (одномерное) собственное подпространство этого оператора.

Ограниченный оператор P называется *проектором*, если $P^2 = P$. Такой оператор проектирует пространство H на свою область значений: $x \mapsto Px$. Эта область значений – подпространство, так как это пространство нулей ограниченного оператора $I - P$. Оператор $Q = I - P$ – тоже проектор, и все пространство разлагается в прямую сумму (1), где $H_1 = PH$ и $H_2 = QH$.

Пусть проектор P перестановочен с A:

$$PA = AP. \tag{2}$$

Если A – неограниченный оператор, то здесь подразумевается совпадение областей определения левой и правой части, так что

$$PD(A) \subset D(A). \tag{3}$$

Из (2) следует, что PH инвариантно относительно A, и то же верно для QH, $Q = I - P$. Эти операторы перестановочны и с резольвентой оператора A (выведите это из (2)).

Предложение 1. *Для резольвенты* $R_A(\lambda)$ *справедливо тождество Гильберта*

$$R_A(\lambda) - R_A(\mu) = (\lambda - \mu) R_A(\lambda) R_A(\mu). \tag{4}$$

Здесь λ и μ – любые две точки из резольвентного множества $\rho(A)$.

Для доказательства умножаем равенство

$$(A - \mu I) - (A - \lambda I) = (\lambda - \mu) I$$

слева на одну резольвенту и справа на другую. □

Пусть Γ – замкнутый гладкий (для простоты) контур на комплексной плоскости, лежащий в резольвентном множестве оператора A и не имеющий самопересечений. Оператор

$$P_A(\Gamma) = -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma R_A(\lambda)\, d\lambda \tag{5}$$

называется *проектором Рисса* для оператора A, отвечающим этому контуру.

Интеграл здесь определяется как предел интегральных сумм по операторной норме: вводим параметр τ вдоль контура, $\alpha \le \tau \le \beta$, и пишем интегральную сумму для интеграла

$$\int_\alpha^\beta (A - \lambda(\tau) I)^{-1} \lambda'(\tau)\, d\tau,$$

для чего разбиваем отрезок $[\alpha, \beta]$ на конечное число частей, берем подинтегральный оператор в промежуточных точках и т.д.

Ограниченность оператора (5) очевидна. Теперь мы будем пользоваться тем, что это интеграл от регулярной функции со значениями в пространстве ограниченных операторов. Операторная регулярная функция $F(\lambda)$ превращается в обычную регулярную функцию, если ею подействовать на вектор x и результат скалярно умножить на другой вектор y:

$$\Phi(\lambda) = (F(\lambda)x, y),$$

а такими скалярными произведениями оператор $F(\lambda)$ однозначно определяется. Отсюда видно, что интеграл от регулярной операторнозначной функции по замкнутому контуру не меняется при деформации контура в пределах области регулярности.

Проверим равенство
$$P_A(\Gamma)^2 = P_A(\Gamma). \tag{6}$$
Запишем для этого $P_A(\Gamma)^2$ в виде

$$P_A(\Gamma)P_A(\Gamma') = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Gamma\int_{\Gamma'} R_A(\lambda)R_A(\mu)\,d\mu\,d\lambda,$$

где контур Γ' чуть шире и ограничивает область, в которой лежит Γ. Применяя тождество Гильберта, запишем правую часть в виде

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Gamma\int_{\Gamma'}(\lambda-\mu)^{-1}R_A(\lambda)\,d\mu\,d\lambda - \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\Gamma\int_{\Gamma'}(\lambda-\mu)^{-1}R_A(\mu)\,d\mu\,d\lambda.$$

В первом повторном интеграле вычисляем внутренний числовой интеграл по μ, он равен $-2\pi i$. Во втором повторном интеграле меняем порядок интегрирования и вычисляем внутренний числовой интеграл по λ, он равен нулю. В итоге эта разность равна $P_A(\Gamma)$.

Упражнение. Пусть Γ_1 и Γ_2 – замкнутые контуры без самопересечений, лежащие в резольвентном множестве оператора A, и пусть замыкания ограниченных областей с границами Γ_1 и Γ_2 не имеют общих точек. Проверьте, что $P_A(\Gamma_1)P_A(\Gamma_2) = 0$.

Если A – неограниченный замкнутый оператор, то область значений оператора (5) содержится в $D(A)$. Действительно, интегральные суммы сходятся по операторной норме к интегралу в (5). Далее, результаты применения к ним оператора A тоже сходятся – к интегралу $\int_\Gamma \lambda R_A(\lambda)\,d\lambda$, так как $AR_A(\lambda) = I + \lambda R_A(\lambda)$ и интеграл от I по замкнутому контуру равен нулю. Остается воспользоваться замкнутостью графика оператора A.

Оператор A перестановочен со своей резольвентой:

$$R_A(\lambda)A = I + \lambda R_A(\lambda) = R_A(\lambda)A$$

на $D(A)$, и эти операторы вместе с равенствами продолжаются на H, так как это ограниченные операторы, а $D(A)$ плотна в H. Поэтому A перестановочен с проектором (5) и $P_A(\Gamma)H$ инвариантно относительно A.

Положим $Q_A(\Gamma) = I - P_A(\Gamma)$. Это подпространство тоже инвариантно относительно A. Обозначим через Ω^+ и Ω^- области на комплексной плоскости, внутреннюю и внешнюю по отношению к контуру Γ. Следующая теорема верна для любого ограниченного оператора и любого неограниченного замкнутого оператора.

Теорема 2. (Ср. [К][1], гл. III, п. 4.) *Спектр сужения $AP_A(\Gamma) = P_A(\Gamma)A$ оператора A на $P_A(\Gamma)H$ лежит в Ω^+ и совпадает со всей частью спектра оператора A, лежащей в этой области. Спектр сужения $AQ_A(\Gamma) = Q_A(\Gamma)A$ оператора A на $Q_A(\Gamma)H$ лежит в Ω^- и совпадает со всей частью спектра*

[1] Т. Като, Теория возмущений линейных операторов, 1972.

оператора A в этой области. Резольвентами этих сужений являются аналитические продолжения операторов $R_A(\mu)P_A(\Gamma)$ и $R_A(\mu)Q_A(\Gamma)$ соответственно.

Доказательство. Пусть μ – точка из $\rho(A)$. Тогда эта точка принадлежит резольвентным множествам операторов $\rho(AP_A(\Gamma))$ и $\rho(AQ_A(\Gamma))$, причем резольвентами являются соответственно $R_A(\mu)P_A(\Gamma)$ и $R_A(\mu)Q_A(\Gamma)$. Действительно, например,

$$(A-\mu I)P_A(\Gamma)R_A(\mu)P_A(\Gamma) = (A-\mu I)R_A(\mu)P_A(\Gamma) = P_A(\Gamma),$$

и на векторах из $D(A)\cap P_A(\Gamma)H$ то же верно для $R_A(\mu)P_A(\Gamma)(A-\mu I)P_A(\Gamma)$.

Покажем, что Ω^- содержится в $\rho(AP_A(\Gamma))$. Для этого прежде всего заметим, что если $\mu\in\Omega^-\cap\rho(A)$, то

$$R_A(\mu)P_A(\Gamma) = R(\mu) =:= -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{\lambda-\mu}R_A(\lambda)\,d\lambda. \tag{7}$$

Действительно,

$$\begin{aligned} R_A(\mu)P_A(\Gamma) &= -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R_A(\mu)R_A(\lambda)\,d\lambda \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma [R_A(\mu)-R_A(\lambda)]\frac{d\lambda}{\mu-\lambda} = R(\mu). \end{aligned}$$

Но этот оператор имеет смысл при всех μ вне Γ. Покажем, что это резольвента для $AP_A(\Gamma)$ при всех $\mu\in\Omega^-$. Имеем ($P_A(\Gamma)$ играет роль единичного оператора в пространстве $P_A(\Gamma)H$)

$$(AP_A(\Gamma)-\mu P_A(\Gamma))R(\mu) = -P_A(\Gamma)\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{\lambda-\mu}(A-\mu I)R_A(\lambda)\,d\lambda. \tag{8}$$

Под знаком интеграла

$$\frac{1}{\lambda-\mu}(A-\mu I)R_A(\lambda) = \frac{1}{\lambda-\mu}I + R_A(\lambda),$$

так что правая часть в (8) равна $P_A(\Gamma)$. Для оператора $R(\mu)(AP_A(\Gamma)-\mu P_A(\Gamma))$ проходит аналогичная выкладка.

Аналогично проверяется, что при $\mu\in\Omega^+$

$$R_A(\mu)Q_A(\Gamma) = -R(\mu)$$

и что при всех $\mu\in\Omega^+$ это резольвента для $AQ_A(\Gamma)$. Действительно, во внутренних точках μ

$$\begin{aligned} R_A(\mu)P_A(\Gamma) &= -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R_A(\mu)R_A(\lambda)\,d\lambda \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{\mu-\lambda}[R_A(\mu)-R_A(\lambda)]\,d\lambda = R_A(\mu)+R(\mu), \end{aligned}$$

так что
$$R_A(\mu)Q_A(\Gamma) = -R(\mu).$$
Во всех внутренних точках μ
$$-(AQ_A(\Gamma) - \mu Q_A(\Gamma))R(\mu) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{\lambda-\mu}(A-\mu I)R_A(\lambda)\,d\lambda$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{\lambda-\mu}[(A-\lambda I)-(\mu-\lambda)I)]R_A(\lambda)\,d\lambda = I - P_A(\Gamma) = Q_A(\Gamma).$$
Аналогичная выкладка проходит, если поменять слева порядок сомножителей.

Итак,
$$\rho(A)\cup\Omega^- \subset \rho(AP_A(\Gamma)) \ \text{ и } \ \rho(A)\cup\Omega^+ \subset \rho(AQ_A(\Gamma)). \tag{9}$$
Пусть теперь, например, $\mu \in \rho(AP_A(\Gamma))\cap\Omega^+$. Тогда A имеет в этой точке резольвенту
$$R_A(\mu) = R_{AP_A(\Gamma)}(\mu)P_A(\Gamma) + R_{AQ_A(\Gamma)}(\mu)Q_A(\Gamma).$$
Поэтому в первом из соотношений (9) имеет место равенство. Аналогично проверяется, что и во втором соотношении (9) имеет место равенство. □