Лекция 3

Доказанная теорема легко обобщается на случай, когда контур Γ состоит из нескольких замкнутых связных частей, ограничивающих области, замыкания которых не имеют общих точек. Далее, если спектр оператора A в Ω^+ можно разбить, скажем, на две части и эти части можно окружить контурами Γ_1 и Γ_2, лежащими в Ω_1^+ и Ω_2^+, где замыкания областей Ω_1^+ и Ω_2^+ не имеют общих точек и лежат в Ω^+, то $P_\Gamma = P_{\Gamma_1} + P_{\Gamma_2}$.

В применении к операторам с компактной резольвентой доказанная теорема не очень интересна по той причине, что контур приходится считать ограниченным. В случае неограниченного контура нельзя надеяться на сходимость интеграла, так как норма резольвенты $R_A(\lambda)$ не может убывать быстрее $1/|\lambda|$. См., например, [A III,5]. Однако могут быть полезны интегралы с добавочными убывающими множителями под знаком интеграла. С этим мы в дальнейшем встретимся.

3. Обратимость оператора в прямом дополнении к корневому подпространству и структура резольвенты вблизи собственного значения. Пусть A – компактный оператор и λ_0 – его ненулевое собственное значение.

Теорема 1. *Имеет место разложение*

$$H = N_A(\lambda_0) \dotplus M_A(\lambda_0), \tag{1}$$

где $M_A(\lambda_0)$ – подпространство, инвариантное относительно A, и сужение оператора A на это подпространство – обратимый оператор.

Доказательство. Обозначим оператор $A - \lambda_0 I$ через B. Мы отмечали в прошлой лекции, что ядра N_ν операторов B^ν, вообще говоря, сначала расширяются с ростом ν, затем стабилизируются, и с этого момента N_ν – корневое подпространство $N_A(\lambda_0)$. Обозначим через M_ν область значений оператора B^ν. Она замкнута, так как это область значений абстрактного оператора Фредгольма 2 рода: $B^\nu = B_1 - \lambda_1 I$, $\lambda_1 \neq 0$. Эти подпространства, вообще говоря, сначала сужаются с ростом ν, но с некоторого номера тоже перестают меняться. Это проверяется при помощи той же леммы из прошлой лекции, подробности см. в [ЛС]. Пусть ν – индекс, с которого N_ν и M_ν стабильны (на самом деле стабильными они становятся одновременно); положим $M_A(\lambda_0) = M_\nu$.

Ясно, что B отображает M_ν в M_ν, так что это подпространство инвариантно относительно B и как следствие относительно A. Пусть $y \in M_\nu = M_{\nu+1}$. Тогда $y = B^{\nu+1}x'$ при некотором x' и $y = B(B^\nu x') = Bx$, где $x \in M_\nu$. Следовательно, B отображает M_ν на M_ν.

Оператор B ничего не аннулирует в M_ν. Действительно, если $Bx = 0$ и $x = B^\nu y$, то $B^{\nu+1}y = 0$, как следствие $B^\nu y = 0$, так что $x = 0$. По теореме Банаха об обратном операторе сужение оператора B на M_ν имеет ограниченный обратный в M_ν.

Проверим, что пересечение подпространств справа в (1) состоит из одного нуля. Пусть $B^\nu x = 0$ и $x = B^\nu y$. Тогда $B^{2\nu} y = 0$. Но отсюда $B^\nu y = 0$, так что в пересечении ничего нет, кроме нуля.

Сужения оператора B на N_ν и M_ν обозначим соответственно через B_N и B_M. Заодно сужения оператора A на эти подпространства обозначим через A_N и A_M. Единичные операторы в этих подпространствах обозначим через I_N и I_M.

Возьмем любое $z \in H$. Положим $y = B_M^{-\nu} B^\nu z$ и $x = z - y$. Тогда $y \in M_A(\lambda_0)$ и $B^\nu x = 0$, так что $x \in N_A(\lambda_0)$. $\square$

С разложением пространства H в прямую сумму подпространств H_1 и H_2 всегда связан "проектор на H_1 параллельно H_2". Обозначим через P проектор на $N_A(\lambda_0)$ параллельно $M_A(\lambda_0)$.

Пусть ε – настолько малое положительное число, что в замкнутом круге с границей

$$\Gamma_0 = \{\lambda : |\lambda - \lambda_0| = \varepsilon\} \tag{2}$$

нет других точек спектра оператора A. Проектор Рисса $P_A(\Gamma_0)$ переобозначим через $P_A(\lambda_0)$.

Теорема 2. *В некоторой проколотой окрестности точки λ_0 резольвента $R_A(\lambda)$ разлагается в сходящийся по операторной норме ряд Лорана по степеням $\lambda - \lambda_0$ с операторными коэффициентами. Порядок полюса резольвенты в λ_0 равен наибольшему из порядков корневых векторов в $N(\lambda_0)$. Коэффициент при $(\lambda-\lambda_0)^{-1}$ совпадает с $-P$, и $P = P_A(\lambda_0)$. Подпространство $M_A(\lambda_0)$ совпадает с $(I - P_A(\lambda_0))H$.*

Эту теорему легко объяснить следующим образом. Часть оператора A в корневом подпространстве $N_A(\lambda_0)$ – это конечномерный оператор с единственным собственным значением λ_0. Резольвента его матрицы – рациональная матричная функция от λ с единственным полюсом λ_0. Порядок этого полюса равен наибольшему из порядков жордановых клеток в жордановой форме этой матрицы. А в $M_A(\lambda_0)$ оператор $A - \lambda I$ обратим при $\lambda = \lambda_0$, значит, обратный оператор существует при близких λ и раскладывается в ряд Неймана. Все же проведем доказательство подробнее.

Доказательство теоремы. (Ср. [ГК][1], гл. I, §2.) Имеем на векторах в $N_A(\lambda_0)$

$$-(\lambda - \lambda_0)^\nu I_N = B_N^\nu - (\lambda - \lambda_0)^\nu I_N =$$
$$(A_N - \lambda I_N)[(\lambda - \lambda_0)^{\nu-1} I_N + (\lambda - \lambda_0)^{\nu-2} B_N + \cdots + B_N^{\nu-1}].$$

Отсюда при $\lambda \neq \lambda_0$

$$-(A_N - \lambda I_N)^{-1} = (\lambda - \lambda_0)^{-1} I_N + \sum_{j=1}^{n-1} (\lambda - \lambda_0)^{-j-1} B_N^j.$$

С другой стороны, оператор $A_M - \lambda_0 I_M$ обратим в некотором круге $\{\lambda : |\lambda - \lambda_0| < c\}$, и в нем резольвента $(A_M - \lambda I_M)^{-1}$ разлагается в ряд Неймана

$$(A_M - \lambda I_M)^{-1} = C_M + (\lambda - \lambda_0) C_M^2 + \dots,$$

[1] И.Ц. Гохберг и М.Г. Крейн, Введение в теорию несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.

где $C_M = R_{A_M}(\lambda_0)$.

В проколотом круге получаем разложение резольвенты оператора A:

$$R_A(\lambda) = -[(\lambda-\lambda_0)^{-\nu} B_N^{\nu-1} + \dots + (\lambda-\lambda_0)^{-2} B_N + (\lambda-\lambda_0)^{-1} I_N]P + \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda-\lambda_0)^k C_M^{k+1} (I-P). \qquad (3)$$

Это и есть искомое разложение. Интегрируя его по окружности малого радиуса с центром λ_0, получаем (после деления на $-2\pi i$) $P = P(\lambda_0)$. $\square$

В [ГК] изолированное собственное значение конечной алгебраической кратности, которому отвечает разложение вида (1), называется *нормальным.* Таким образом, ненулевые собственные значения компактного оператора нормальны. Ниже мы проверим, что все собственные значения оператора с компактной резольвентой тоже нормальны.

Пусть A – оператор с компактной резольвентой и снова для простоты существует $A^{-1} = T$. Пусть A имеет собственное значение λ_0 (оно отлично от нуля); тогда, как мы знаем, T имеет собственное значение $\mu_0 = 1/\lambda_0$. Обозначим через $P_A(\lambda_0)$ и $P_T(\mu_0)$ проекторы Рисса для операторов A и T, отвечающие окружностям сколь угодно малых радиусов с центрами в λ_0 и μ_0, и рассмотрим разложение

$$H = N_T(\mu) \dotplus M_T(\mu). \qquad (3)$$

Теорема 3. *Проекторы $P_A(\lambda_0)$ и $P_T(\mu_0)$ совпадают. Подпространство $M_A(\lambda_0) =: M_T(\mu_0)$ инвариантно относительно оператора A, и оператор $A - \lambda_0 I$ имеет в нем ограниченный обратный.*

Доказательство. Совпадение проекторов проверяется заменой $\mu = 1/\lambda$ в интеграле по μ:

$$\begin{aligned}\int_{|\mu-\mu_0|=\varepsilon} (T-\mu I)^{-1}\, d\mu &= \int_{|\lambda-\lambda_0|=\varepsilon'} (T-\lambda^{-1}I)^{-1}(-\lambda^{-2}) d\lambda \\ &= \int_{|\lambda-\lambda_0|=\varepsilon'} (I-\lambda T)^{-1}\lambda^{-1} d\lambda \\ &= \int_{|\lambda-\lambda_0|=\varepsilon'} [(I-\lambda T)+\lambda T](I-\lambda T)^{-1}\lambda^{-1} d\lambda \\ &= \int_{|\lambda-\lambda_0|=\varepsilon'} T(I-\lambda T)^{-1}\, d\lambda.\end{aligned}$$

Отсюда следует совпадение проекторов $I - P_A(\lambda_0)$ и $I - P_T(\mu_0)$ и инвариантность пространства $M_A(\lambda_0)$ относительно A. Обратимость на нем оператора $A - \lambda_0 I$ следует из теоремы 2 в п.2 (в прошлой лекции). Впрочем, резольвенту легко написать: это модифицированая резольвента сужения оператора T на $M_T(\mu_0)$.

Теорема 4. *Пусть λ_0 – собственное значение оператора A. Тогда в некоторой проколотой окрестности точки λ_0 резольвента $R_A(\lambda)$ разлагается в* *сходящийся ряд Лорана по степеням* $\lambda - \lambda_0$ *с операторными коэффициентами, причем порядок полюса равен максимальному порядку корневых векторов в корневом подпространстве* $N_A(\lambda_0)$.

Доказательство. Проще всего действовать как в доказательстве теоремы 2. Сужение резольвенты на $M_A(\lambda_0)$ разлагается в ряд Тейлора в некотором круге с центром λ_0. В корневом подпространстве $N_A(\lambda_0)$ резольвента разлагается в конечную сумму по отрицательным степеням $\lambda - \lambda_0$ в проколотом круге. (На этом подпространстве оператор A ограничен и ничем принципиально не отличается от оператора T в $N_T(\mu_0)$.) $\square$