Лекция 5

Разберемся, что считать степенью подчинения в случае компактных операторов.

Если T и T_0 – компактные операторы с неограниченными обратными, T_0 – самосопряженный и $T = T_0 + T_1$, то напишем

$$T = (I + T_1 T_0^{-1}) T_0$$

и перейдем к обратным операторам:

$$(T_0 + T_1)^{-1} = T_0^{-1}(I + T_1 T_0^{-1})^{-1} = T_0^{-1} - T_0^{-1} T_1 T_0^{-1} (I + T_1 T_0^{-1})^{-1}.$$

Степень подчинения второго слагаемого справа первому назовем степенью подчинения оператора T_1 оператору T_0. В конкретных ситуациях это обычно степень подчинения оператора $T_0^{-1} T_1 T_0^{-1}$ оператору T_0^{-1}.

Примеры.

1. Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения в частных производных 2-го порядка в ограниченной области $G = G^+$ с гладкой границей S, старшая часть которого – лапласиан с обратным знаком:

$$-\Delta u(x) + \sum_1^n b_j(x) \partial_j u(x) + c(x) u(x) = f(x) \ \ (x \in G), \quad u^+(x) = 0. \tag{4}$$

Если $b_j(x)$ – чисто мнимые функции, а функция $c(x)$ вещественна, то отвечающий этой задаче оператор A в $L_2(G)$ является самосопряженным. (Его область определения – подпространство в $H^2(G)$, выделяемое граничным условием $u^+ = 0$. Формальная самосопряженность следует из формулы Грина для оператора Лапласа.) В противном случае $A = A_0 + A_1$, где A_1 имеет порядок $1/2$ (если функции $b_j(x)$ не являются чисто мнимыми) или 0.

Оператор A_0 имеет компактную резольвенту. Ниже мы увидим, что это верно и для A.

2. Рассмотрим интегральный оператор

$$T\varphi(x) = \int_S E(x-y)\varphi(y)\, dS_y \tag{5}$$

на замкнутой двумерной бесконечно гладкой поверхности S, где $E(x)$ – фундаментальное решение уравнения Гельмгольца $\Delta u + k^2 u = 0$:

$$E(x) = -\frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}. \tag{6}$$

Это конечно, компактный оператор в $L_2(S)$. Его вещественная и мнимая части – интегральные операторы с ядрами

$$-\frac{\cos k|x|}{4\pi|x|} \quad \text{и} \quad -\frac{\sin k|x|}{4\pi|x|}. \tag{7}$$

Можно показать, что оператор T_0 с первым ядром, как и T, – эллиптический ПДО порядка -1. Второе ядро является бесконечно гладким. Оператор T_1 с этим ядром, умноженным на i, имеет порядок меньше любого отрицательного числа относительно T_0, и можно сказать, что T_1 имеет порядок $-\infty$ относительно T_0, если $\operatorname{Ker} T_0 = \{0\}$. (Неясно, правда, всегда ли это так. Но если $\operatorname{Ker} T_0$ нетривиально, то из эллиптичности следует, что оно конечномерно и натянуто на несколько бесконечно гладких функций. Тогда надо "исправить" эти два оператора: из T_0 вычесть, а к T_1 прибавить подходящий конечномерный оператор с бесконечно гладким ядром.)

Замечание. В спектральной теории эллиптических задач два класса задач особенно популярны.

1) Задачи вида

$$Lu = \lambda u \ \text{ в } \ G, \quad Bu = 0 \ \text{ на } \ S. \tag{8}$$

Здесь L – эллиптический оператор в частных производных, $Bu = 0$ – "эллиптическое" граничное условие.

Пусть $L = L_0 + L_1$, где L_0 и L_1 – тоже операторы в частных производных, $\operatorname{ord} L_0 > \operatorname{ord} L_1$ и задача

$$L_0 u = \lambda u \ \text{ в } \ G, \quad Bu = 0 \ \text{ на } \ S \tag{9}$$

в отличие от (8) формально самосопряженная. Тогда причина несамосопряженности – наличие слагаемого L_1. Снова поясним, что формальная самосопряженность – это справедливость формулы Грина вида

$$(L_0 u, v)_G = (u, L_0 v)_G$$

на гладких функциях, удовлетворяющих граничным условиям. В этом случае для оператора A и самосопряженного оператора A_0 в $L_2(G)$, отвечающих задачам (8) и (9), имеем $A = A_0 + A_1$, где A_1 имеет *неотрицательный* порядок q относительно A_0. В примере 1 встретилась именно такая ситуация.

2) Уравнение

$$A\varphi = \lambda\varphi, \tag{10}$$

где A – эллиптический дифференциальный или псевдодифференциальный оператор ненулевого порядка на замкнутой поверхности S. См. пример 2 выше. В этом случае q может быть отрицательным. Часто к таким уравнениям на S сводятся задачи со спектральным параметром в граничном условии:

$$Lu = 0 \ \text{ в } \ G, \quad Bu^+ = \lambda C u^+ \ \text{ на } \ S,$$

где B и C – граничные операторы разных порядков. Можно показать, что на самом деле именно таким является оператор, переводящий правую часть условия Неймана в правую часть условия Дирихле (см. предыдущую лекцию). Оператор (5) отвечает следующей задаче немного другой структуры: уравнение Гельмгольца вне S (т.е. в G^+ и во внешней области G^- с той же границей;

решения при этом подчиняются некоторому условию правильного поведения на бесконечности) с "условиями сопряжения"

$$u^{+} = u^{-}, \quad u^{\pm} = \lambda(\partial_\nu u^{-} - \partial_\nu u^{+})$$

на S.

Теперь мы докажем несколько утверждений о слабом возмущении самосопряженного оператора с компактной резольвентой. Содержание теорем состоит в том, что возмущенный оператор тоже имеет компактную резольвенту, при этом выявляется информация о расположении его спектра.

Теорема 1. *Пусть A_0 – самосопряженный оператор с тривиальным ядром и компактной резольвентой, и пусть $A = A_0 + A_1$, где оператор A_1 компактен относительно A_0. Тогда A – тоже оператор с компактной резольвентой. Пусть ε – сколь угодно малое число. Тогда все собственные значения оператора A находятся в объединении Λ_ε открытых угловых окрестностей лучей $\mathbb{R}_\pm$ раствора 2ε с биссектрисами $\mathbb{R}_\pm$ и некоторой окрестности O_ε начала. При этом вне этого множества выполняется равномерная оценка*

$$\|R_A(\lambda)\| \leq C_\varepsilon |\lambda|^{-1}. \tag{11}$$

Если оператор A_0 полуограничен снизу, то утвержение верно с одной правой угловой окрестностью вместо двух.

Доказательство. Имеем

$$A - \lambda I = [I + A_1 R_{A_0}(\lambda)](A_0 - \lambda I), \tag{12}$$

и здесь

$$A_1 R_{A_0}(\lambda) = T[I - \lambda A_0^{-1}]^{-1}, \tag{13}$$

где $T = A_1 A_0^{-1}$ – компактный оператор. Достаточно показать, что норма оператора (13) становится меньше какого-нибудь числа $\theta \in (0, 1)$ при достаточно больших по модулю λ вне Λ_ε. Действительно, тогда для этих λ существует

$$R_A(\lambda) = R_{A_0}(\lambda)[I + A_1 R_{A_0}(\lambda)]^{-1} \tag{14}$$

и

$$\|R_A(\lambda)\| \leq (1 - \theta)^{-1} \|R_{A_0}(\lambda)\|, \tag{15}$$

что легко приводит к нужной оценке, так как

$$\|R_{A_0}(\lambda)\| \leq (\operatorname{Im} \lambda)^{-1} \leq 1/(|\lambda| \sin \varepsilon).$$

Оказывается, что норма оператора (13) даже равномерно стремится к нулю вне Λ_ε. Именно, справедлива следующая лемма М.В. Келдыша (мы ее приводим с небольшим сужением общности (ср. [ГК], гл. V, §7):

Лемма. *Пусть T и Θ – компактные операторы и Θ – самосопряженный оператор с тривиальным ядром. Тогда для сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$*

норма оператора $T(I-\lambda\Theta)^{-1}$ равномерно стремится к нулю вне Λ_ε при $\lambda\to\infty$.

Доказательство леммы. Обозначим через $\{e_j\}_1^\infty$ базис из собственных векторов оператора Θ и через γ_j его собственные значения. Полагая $\mu=1/\lambda$, имеем

$$||(I-\lambda\Theta)^{-1}||=\sup\frac{|\mu|}{|\mu-\gamma_j|}\le\frac{|\mu|}{|\operatorname{Im}\mu|}\le\frac{1}{\sin\varepsilon}. \tag{16}$$

Пусть δ – малое число. Представим оператор T в виде суммы конечномерного оператора K и оператора M с нормой $||M||\le\delta$. Тогда

$$||M(I-\lambda\Theta)^{-1}||\le\frac{\delta}{\sin\varepsilon}.$$

Пусть T состоит из n слагаемых вида $T_k=(\,\cdot\,,v_k)w_k$, $||w_k||=1$, $n=n(\delta)$. Рассмотрим $T_k(1-\lambda\Theta)^{-1}u$. Этот вектор можно представить в виде

$$\sum_{j=1}^\infty\frac{(u,e_j)(e_j,v_k)}{1-\lambda\gamma_j}w_k.$$

Квадрат его нормы по неравенству Шварца не превосходит

$$\sum_{j=1}^\infty\frac{|(e_j,v_k)|^2}{|1-\lambda\gamma_j|^2}||u||^2. \tag{17}$$

Разобьем эту сумму на две: с $j<N$ и $j\ge N$, где N настолько велико, что

$$\sum_{j=N}^\infty|(e_j,v_k)|^2<\frac{\delta^2}{n^2}.$$

Соответствующая часть суммы (17) не превосходит $||u||^2\delta^2/n^2(\sin\varepsilon)^2$ в силу (16). Остальная часть суммы (17) равна произведению $||u||^2$ на не зависящий от u множитель, стремящийся к нулю при $\lambda\to\infty$ в дополнении к Λ_ε. В частности, он становится меньше δ^2/n^2 при достаточно больших по модулю λ вне Λ_ε.

Итак, при достаточно больших по модулю λ из дополнения к Λ_ε

$$||T(I-\lambda\Theta)^{-1}||\le C\delta,$$

где C не зависит от δ. $\square$

Поправка к формулировке теоремы в случае полуограниченного снизу оператора A_0 очевидна. $\square$

Обозначим через $O(\lambda_0,r)$ открытый круг с центром в точке λ_0 радиуса r. В следующем предложении A_0 – самосопряженный оператор с компактной резольвентой, $\{\lambda_j\}_1^\infty$ – набор всех его собственных значений и $A=A_0+A_1$, где оператор A_1 подчинен q-й степени оператора A_0, $q < 1$. Положим $b = \|A_1 A_0^{-q}\|$. Через $d(\lambda)$ обозначается расстояние от точки λ до спектра оператора A_0.

Теорема 2. *Спектр оператора A находится в замыкании объединения кругов $O(\lambda_j, b|\lambda_j|^q)$. Если δ – положительное число, то вне объединения кругов $O(\lambda_j, b(1+\delta)|\lambda_j|^q)$ справедлива оценка*

$$\|R_A(\lambda)\| \leq \frac{1+\delta}{\delta} \frac{1}{d(\lambda)}. \tag{18}$$

Доказательство. При $\lambda \in \rho(A_0)$

$$A - \lambda I = A_0 - \lambda I + A_1 = [I + A_1 A_0^{-q} A_0^q R_{A_0}(\lambda)](A_0 - \lambda I). \tag{19}$$

Здесь

$$\|A_0^q R_{A_0}(\lambda)\| = \sup |\lambda_j|^q |\lambda_j - \lambda|^{-1}. \tag{20}$$

Поэтому оператор в квадратных скобках обратим, если при всех j

$$b(1+\delta) \sup |\lambda_j|^q |\lambda_j - \lambda|^{-1} < 1,$$

т.е.

$$|\lambda - \lambda_j| > b(1+\delta)|\lambda_j|^q.$$

Тогда

$$R_A(\lambda) = R_{A_0}(\lambda)[I + A_1 A_0^{-q} A_0^q R_{A_0}(\lambda) I]^{-1}. \tag{21}$$

При этом норма оператора $[\ldots]^{-1}$ не превосходит

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{\delta+1}} = \frac{1+\delta}{\delta},$$

что и приводит к оценке (18), так как $\|R_{A_0}(\lambda)\| = 1/d(\lambda)$.

Пересечение по всем $\delta > 0$ объединений кругов с радиусами $b(1+\delta)|\lambda_j|^q$ – это замыкание объединения кругов с радиусами $b|\lambda_j|^q$. $\square$