Лекция 7

Замечание. Последняя теорема распространяется на положительные собственные значения любого компактного оператора.

Следствие 1. *Пусть T_1 и T_2 – компактные операторы и $0 \le T_1 \le T_2$ (в смысле $T_2 - T_1 \ge 0$). Тогда*

$$\lambda_k(T_1) \le \lambda_k(T_2)$$

при всех k. Во всех этих неравенствах одновременно имеет место знак равенства тогда и только тогда, когда $T_1 = T_2$.

Любой компактный оператор T можно представить в виде разности $T_+ - T_-$ неотрицательных операторов

$$T_+ = \sum_{\lambda_k(T)>0} \lambda_k(T)(\cdot, e_k)e_k, \quad \text{и} \quad T_- = -\sum_{\lambda_k(T)<0} \lambda_k(T)(\cdot, e_k)e_k. \tag{4}$$

Следствие 2. *Пусть самосопряженный компактный оператор T представлен в виде разности $T_1 - T_2$ неотрицательных компактных операторов T_1 и T_2. Тогда*

$$\lambda_k(T_+) \le \lambda_k(T_1) \quad \text{и} \quad \lambda_k(T_-) \le \lambda_k(T_2) \tag{5}$$

при всех k.

Это видно из того, что

$$(T_1u, u) = (Tu, u) + (T_2u, u) \ge (Tu, u),$$
$$(T_2u, u) \ge -(Tu, u).$$

Отсюда проверяемое утверждение следует в силу замечания в начале лекции.

2. s-числа компактных операторов и их простейшие свойства. Пусть T – компактный оператор в гильбертовом пространстве H. Тогда T^*T – компактный самосопряженный оператор. Он неотрицателен:

$$(T^*Tu, u) = (Tu, Tu) \ge 0.$$

Если $\{e_k\}_1^\infty$ – ортонормированный базис из его собственных векторов и $\lambda_k(T^*T)$ – соответствующие (неотрицательные) собственные значения, то, заменяя их на неотрицательные квадратные корни $[\lambda_k(T^*T)]^{1/2}$ (и сохраняя собственные векторы), получаем неотрицательный оператор $S = (T^*T)^{1/2}$. Эти корни, т.е. собственные значения $\lambda_k(S)$, и называются *s-числами* $s_k(T)$ оператора T. Ненулевые $s_k(T)$ нумеруются в порядке невозрастания с учетом кратности. Немного дальше мы увидим, что в этом определении можно заменить оператор T^*T на TT^*.

Обсудим несколько свойств s-чисел.

1. *Первое s-число $s_1(T)$ оператора T совпадает с его нормой.*

Это следует из формулы (см. предыдущую лекцию)

$$[s_1(T)]^2 = \max \frac{(T^*Tu, u)}{(u, u)} = \max \frac{(Tu, Tu)}{(u, u)}.$$

2. *Если T – нормальный оператор, то $s_k(T)$ – модули его собственных значений, занумерованных в порядке неубывания с учетом кратности.*

Это очевидно: в этом случае T и T^* имеют общие собственные векторы (и сопряженные собственные значения); они же являются собственными векторами операторов TT^* и T^*T.

Следующее свойство тоже очевидно.

3. *Для любого числа c справедливо равенство $s_k(cT) = |c|\, s_k(T)$.*

4. *Для любого ограниченного оператора B*

$$s_k(BT) \leq ||B|| s_k(T) \quad \text{и} \quad s_k(TB) \leq ||B|| s_k(T) \tag{6}$$

при всех k.

Проверим первое из этих соотношений. Имеем

$$s_k^2(BT) = \lambda_k(T^*B^*BT), \quad s_k^2(T) = \lambda_k(T^*T).$$

С другой стороны,

$$(T^*B^*BTu, u) = ||BTu||^2 \leq ||B||^2 ||Tu||^2 = ||B||^2 (T^*Tu, u),$$

так что $T^*B^*BT \leq ||B||^2 T^*T$ и можно применить следствие 1 из предыдущего пункта.

Второе из соотношений (6) проверим немного ниже.

3. Полярное представление и разложение Шмидта компактного оператора. Выше мы определили самосопряженный оператор S – неотрицательный квадратный корень из оператора T^*T. Для него имеем

$$(Tu, Tv) = (T^*Tu, v) = (S^2u, v) = (Su, Sv)$$

и, в частности,

$$||Tu||^2 = ||Su||^2.$$

Определим оператор U на векторах Su формулой $U(Su) = Tu$. Это изометрическое отображение $\operatorname{Ran} S$ на $\operatorname{Ran} T$. Оно продолжается до изометрического отображения замыкания первой области значений на замыкание второй по непрерывности. Ортогональное дополнение к ней – это ядро $\operatorname{Ker} S$. На нем полагаем U равным нулю. Полученный оператор изометрически отображает ортогональное дополнение к своему ядру на свою область значений. Оператор с таким свойством называют *частично изометрическим.* Он изометрический, если не имеет ядра, т.е. если $\operatorname{Ker} S = 0$.

Мы теперь имеем для оператора T представление

$$T = US, \tag{7}$$

где U – частично изометрический и S – неотрицательный (самосопряженный) оператор. Это и есть *полярное представление компактного оператора.* (Аналогичное представление можно построить для любого ограниченного оператора.) Оно напоминает представление комплексного числа z в виде $e^{i \arg z}|z|$.

Пусть снова $\{e_k\}$ – ортонормированный базис из собственных векторов оператора S, отвечающих его ненулевым собственным значениям $s_k(T)$. Тогда

$$S = \sum s_k(T)(\cdot, e_k)e_k.$$

Применим к обеим частям оператор U. Получим

$$T = \sum s_k(T)(\cdot, e_k)Ue_k.$$

Система векторов $f_k = Ue_k$ тоже является ортонормированной.

Таким образом,

$$T = \sum s_k(A)(\cdot, e_k)f_k, \tag{8}$$

где $\{e_k\}$ и $\{f_k\}$ – две ортонормированные системы векторов; этот ряд сходится по операторной норме. Формула (8) называется *разложением Шмидта* компактного оператора T.

Продолжим теперь вывод свойств s-чисел.

5. *В определении s-чисел оператора T можно оператор T^*T заменить на TT^*. Иначе говоря,*

$$s_k(T) = s_k(T^*). \tag{9}$$

Это получается так. Заметим, что

$$[(\cdot, e_k)f_k]^* = (\cdot, f_k)e_k.$$

Действительно,

$$((u, e_k)f_k, v) = (u, e_k)(f_k, v) = (u, (v, f_k)e_k).$$

Поэтому из (8) следует, что

$$T^* = \sum s_k(T)(\cdot, f_k)e_k. \tag{10}$$

Из (8) и (10) имеем, используя сходимость этих двух рядов по операторной норме,

$$T^*T = \sum s_k^2(T)(\cdot, e_k)e_k, \quad TT^* = \sum s_k^2(T)(\cdot, f_k)f_k.$$

Ненулевые собственные значения этих операторов в порядке неубывания совпали. Отсюда следует наше утверждение.

Теперь второе соотношение в (6) получается так:

$$s_k(TB) = s_k(B^*T^*) \leq \|B^*\| s_k(T^*) = \|B\| s_k(T).$$

Отметим еще, что соотношения (6) обобщаются следующим образом: если H_1 и H_2 – два гильбертовых пространства, B_1 – ограниченный оператор из H_1 в H_2, B_2 – ограниченный оператор из H_2 в H_1 и T – компактный оператор в H_2, так что B_2TB_1 – компактный оператор в H_1, то

$$s_j(B_2TB_1) \leq \|B_1\|\|B_2\| s_j(T). \tag{11}$$

Это можно проверить, используя изометрический изоморфизм пространств H_1 и H_2: заменяем два пространства одним.

4. Второе определение s-чисел. Будем обозначать через $\mathcal{K}_l$ совокупность всех конечномерных операторов в H размерности не выше l.

Теорема. *Для любого компактного оператора T при любом $l = 0, 1, \dots$*

$$s_{l+1}(T) = \min_{K \in \mathcal{K}_l} \|T - K\|. \tag{12}$$

Доказательство. Пусть $K \in \mathcal{K}_l$. Подпространство $H \ominus L(K)$, где $L(K) = \operatorname{Ker} K$, является не более чем l-мерным, и в силу принятой упорядоченности s-чисел и минимаксимального свойства собственных чисел неотрицательного оператора

$$s_{l+1}(T) \leq \max_{u \in L(K)} \frac{\|Su\|}{\|u\|} = \max_{u \in L(K)} \frac{\|Tu\|}{\|u\|}.$$

При $u \in L(K)$ имеем

$$\|Tu\| = \|(T - K)u\| \leq \|T - K\|\|u\|.$$

Поэтому получаем

$$s_{l+1}(T) \leq \|T - K\|.$$

С другой стороны, для l-й частной суммы разложения Шмидта (8) оператора T,

$$K_l = \sum_{j=1}^{l} s_j(T)(\cdot, e_j) f_j, \tag{13}$$

имеем

$$\|T - K_l\| = s_{l+1}(T), \tag{14}$$

так как это первое s-число оператора $\|T - K_l\|$. $\square$

Таким образом, $s_{l+1}(T)$ – расстояние от оператора T до $\mathcal{K}_l$. Это новое определение s-чисел, эквивалентное первоначальному.

Следствие 1. *Пусть T – компактный оператор и K – r-мерный оператор. Тогда*

$$s_{l+r}(T) \leq s_l(T+K) \leq s_{l-r}(T) \tag{15}$$

(второе неравенство верно при $l > r$).

Доказательство. Для оператора (13) согласно (14) и только что доказанной теореме

$$s_{l+1}(T) = \|(T+K) - (K+K_l)\| \geq s_{l+r+1}(T+K) \quad (l = 0, 1, \ldots). \tag{16}$$

Поменяв ролями операторы T и $T+K$, получим

$$s_{l+1}(T+K) \geq s_{l+r+1}(T) \quad (l = 0, 1, \ldots). \tag{16'}$$

Из (16) и (16') следует (15). □

Следствие 2 (Ки Фань). *Для любых компактных операторов T_1 и T_2*

$$s_{k+l-1}(T_1 + T_2) \leq s_k(T_1) + s_l(T_2) \quad (k, l = 1, 2, \ldots), \tag{17}$$

и

$$s_{k+l-1}(T_1 T_2) \leq s_k(T_1) s_l(T_2) \quad (k, l = 1, 2, \ldots). \tag{18}$$

Доказательство. Пусть K_1 – такой $(k-1)$-мерный оператор и K_2 – такой $(l-1)$-мерный оператор, что

$$s_k(T_1) = \|T_1 - K_1\| \quad \text{и} \quad s_l(T_2) = \|T_2 - K_2\|. \tag{19}$$

$(k, l \geq 1)$. Тогда

$$s_{k+l-1}(T_1 + T_2) \leq \|(T_1 + T_2) - (K_1 + K_2)\| \leq \|T_1 - K_1\| + \|T_2 - K_2\| = s_k(T_1) + s_l(T_2).$$

Далее,

$$(T_1 - K_1)(T_2 - K_2) = T_1 T_2 - [T_1 K_2 + K_1(T_2 - K_2)],$$

и здесь размерность оператора в квадратных скобках не превосходит $k + l - 2$. Поэтому

$$s_{k+l-1}(T_1 T_2) \leq \|T_1 - K_1\| \|T_2 - K_2\| = s_k(T_1) s_l(T_2). \quad \square$$

Для собственных значений неотрицательных компактных операторов неравенства (17) и (18) нашел Г. Вейль.

Следствие 3. *Для любых компактных операторов T_1 и T_2*

$$|s_k(T_1) - s_k(T_2)| \leq \|T_1 - T_2\| \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{20}$$

Доказательство. Имеем

$$s_{l+1}(T_1) = \min_{K \in \mathcal{K}_l} \|T_1 - K\| =$$

$$\min_{K \in \mathcal{K}_l} \|T_2 - K + T_1 - T_2\| \leq \min_{K \in \mathcal{K}_l} \|T_2 - K\| + \|T_1 - T_2\| = s_{l+1}(T_2) + \|T_1 - T_2\|.$$

Поменяв ролями операторы, получим

$$s_{l+1}(T_2) \leq s_{l+1}(T_1) + \|T_1 - T_2\|.$$

Из полученных неравенств следует (20). □