Лекция 8

Следствие 4 (Ки Фань). *Пусть T_1 и T_2 – компактные операторы и при некоторых положительных a и p*

$$s_k(T_1) = ak^{-p} + o(k^{-p}), \quad s_k(T_2) = o(k^{-p}). \tag{21}$$

Тогда

$$s_k(T_1 + T_2) = ak^{-p} + o(k^{-p}). \tag{22}$$

Доказательство. Из (17) следует, что при любом натуральном q

$$s_{(q+1)l+j}(T_1 + T_2) \le s_{ql+j}(T_1) + s_{l+1}(T_2). \tag{23}$$

Полагая $k = (q+1)l + j$, $0 \le j < q$, и устремляя k к бесконечности, из (21) и (23) получаем

$$\overline{\lim}_{k\to\infty} k^p s_k(T_1 + T_2) \le \left(\frac{q+1}{q}\right)^p a.$$

Ввиду произвольности q отсюда следует, что

$$\overline{\lim}_{k\to\infty} k^p s_k(T_1 + T_2) \le a. \tag{24}$$

С другой стороны, $T_1 = (T_1 + T_2) - T_2$ и поэтому

$$s_{(q+1)l+j}(T_1) \le s_{ql+j}(T_1 + T_2) + s_{l+1}(T_2),$$

или

$$s_{ql+j}(T_1 + T_2) \ge s_{(q+1)l+j}(T_1) - s_{l+1}(T_2).$$

Полагая $k = ql + j$, $0 \le j < q$, и устремляя k к бесконечности, получаем

$$\underline{\lim}_{k\to\infty} k^p s_k(T_1 + T_2) \ge \left(\frac{q}{q+1}\right)^p a.$$

Значит,

$$\underline{\lim}_{k\to\infty} k^p s_k(T_1 + T_2) \ge a. \tag{25}$$

Из (24) и (25) получаем (22). □

Для собственных значений неотрицательных компактных операторов последний результат тоже принадлежит Г. Вейлю.

4. Примеры. Для ориентировки в том, что известно в спектральной теории эллиптических уравнений, приведем без доказательства следующий факт.

Пусть M – замкнутое гладкое n-мерное многообразие (например, замкнутая гиперповерхность в $\mathbb{R}^{n+1}$) и T_0 – неотрицательный эллиптический дифференциальный или псевдодифференциальный оператор отрицательного порядка $-m$ на M. Тогда

$$\lambda_k(T_0) = ck^{-m/n} + o(k^{-m/n}), \tag{26}$$

где положительный предел c вычисляется через главный символ.

Собственные значения нумеруются в порядке невозрастания с учетом кратности. Для неотрицательного оператора это и его s-числа. Если ПДО не является самосопряженным, то такую асимптотику имеют его s-числа. Таким образом, асимптотика имеет степенной характер.

Мы пока не останавливаемся на более точных фактах (более точная оценка остатка, раздельная асимптотика положительных и отрицательных собственных значений в случае, когда ПДО не является знакоопределенным, формула для коэффициента). Их формулировки можно найти в [A].[1]

Но и в приведенной формулировке это достаточно глубокая теорема. Она получается из исследования некоторых функций от эллиптического оператора $A = T^{-1}$ положительного порядка – резольвенты $R_A(\lambda)$ или ее степени $[R_A(\lambda)]^q$, степени A^{-z} или экспоненты e^{-tA}, $t > 0$. Точнее, изучаются их ядра в их интегральном представлении и применяются тауберовы теоремы.

Аналогичное утверждение справедливо для операторов, обратных к операторам, которые отвечают самосопряженным эллиптическим граничным задачам для эллиптических уравнений порядка m с однородными граничными условиями в ограниченной n-мерной области G с гладкой границей S. Например, задача Дирихле

$$-\Delta u = f \ \text{ в } \ G, \quad u^+ = 0 \tag{27}$$

однозначно разрешима. Здесь $m = 2$, и для обратного оператора $T_0 : f \mapsto u$ в $L_2(G)$ (он неотрицателен) имеем

$$\lambda_k(T_0) = ck^{-2/n} + o(k^{-2/n}). \tag{28}$$

Вернемся к случаю замкнутого многообразия M. ПДО T_0 порядка $-m$ действует ограниченным образом из $H^0(M)$ в $H^m(M)$; если он эллиптичен, то имеет конечномерные ядро и коядро. Предположим, что они тривиальны, т.е. что оператор $T_0 : H^0(M) \mapsto H^m(M)$ обратим. Такой оператор T_0 несложно построить, и он сейчас будет использован.

Из приведенного утверждения выводится такое следствие:

Пусть T – любой оператор, действующий ограниченным образом из $H^0(M)$ в $H^m(M)$, $m > 0$. Тогда

$$s_k(T) = O(k^{-m/n}). \tag{29}$$

Поясним, что такой оператор T компактен ввиду компактности вложения пространства $H^m(M)$ в $H^0(M)$ (напомним, что M предполагается компактным). Для доказательства сформулированного утверждения надо написать $T = T_0(T_0^{-1}T)$ и применить второе из неравенств (6). Из предыдущего утверждения видно, что оценка (29) точна.

Соотношение (29) справедливо также для операторов, действующих ограниченным образом из $H^0(G)$ в $H^m(G)$, $m > 0$, где G – ограниченная область

[1] Обзор лектора "Эллиптические псевдодифференциальные операторы" в серии ВИНИТИ "Современные проблемы математики, Фундаментальные направления", т. 63, 1990. Английские переводы книг всей этой серии вышли в издательстве Springer. Перевод упомянутого обзора см. на сайте М.С. www.agranovich.nm.ru.

в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей (вопрос об ослаблении предположений о гладкости обсуждать здесь не будем).

5. Лемма И. Шура. Обозначим через $C = C(T)$ замыкание линейной оболочки всех корневых векторов компактного оператора T, отвечающих его ненулевым собственным значениям. Это подпространство в H, инвариантное относительно T. Собственные значения оператора T считаем занумерованными в порядке невозрастания модулей с учетом кратностей.

Лемма 1 (Шур). *В $C(T)$ существует ортонормированный базис $\{f_l\}$, в котором матрица оператора T треугольна,*

$$Tf_j = a_{j,1}f_1 + \dots a_{j,j}f_j, \tag{30}$$

причем диагональные элементы $a_{j,j}$ совпадают с собственными числами $\lambda_j(T)$.

Для доказательства надо в каждом корневом подпространстве, отвечающем собственному значению λ_k, взять жорданов базис. Для каждого вектора g_l этого базиса или $Tg_l = \lambda g_l$, или $Tg_l = \lambda g_l + g_{l-1}$. Составленную из этих базисов систему подвергаем процессу последовательной ортогонализации. Получается нужный базис. □

Этот базис назовем *базисом Шура* для оператора T. Для дальнейшего нам понадобится следующий результат.

Лемма 2. *В базисе Шура*

$$\det[(Tf_j, Tf_k)]_{j,k=1}^n = |\lambda_1|^2 \dots |\lambda_n|^2. \tag{31}$$

Это проверяется так. В силу равенства Парсеваля

$$(Tf_j, Tf_k) = \sum_l (Tf_j, f_l)\overline{(Tf_k, f_l)},$$

где заведомо $l \leq n$, так как дальнейшие скалярные произведения – нули. Поэтому интересующий нас определитель равен произведению определителя матрицы $[(Tf_j, f_l)]_{j,l=1}^n$ на сопряженное к нему число, т.е. квадрату модуля этого определителя. Этот определитель равен, конечно, произведению $\lambda_1 \dots \lambda_n$. □

6. Неравенства, связывающие собственные значения и s-числа компактного оператора.[2] В этом пункте мы выясняем, как из информации об s-числах компактного оператора можно выводить следствия для его собственных значений. Для непосредственного исследования обычно доступнее s-числа, так как это собственные значения самосопряженного оператора.

Напомним, что $S^2 = T^*T$ и $T = US$, где U – ограниченный оператор. Поэтому если один из операторов T и S конечномерен, то конечномерен и другой и их размерности совпадают. Тогда эти размерности обозначим через $\nu(T)$; в противном случае оба эти оператора бесконечномерны и мы будем считать,

[2] Мы в основном следуем [ГК], но там изложение является более обстоятельным.

что $\nu(T)=\infty$. В приведенном ниже неравенстве (32) и аналогичных неравенствах дальше $n=1,\dots,\nu(T)$ в первом случае и n – любое натуральное число во втором. Главный интерес представляют операторы бесконечной размерности.

Теорема 1 (Г. Вейль). *Для любого компактного оператора T*

$$|\lambda_1(T)\dots\lambda_n(T)|\le s_1(T)\dots s_n(T). \tag{32}$$

Доказательство. Пусть $\{e_j\}$ – ортонормированный базис из собственных векторов оператора T^*T с собственными значениями $s_l^2(A)$. Мы имеем

$$(Tf_j,Tf_k)=(T^*Tf_j,f_k)=\sum_l s_l^2(f_j,e_l)(e_l,f_k).$$

Определитель матрицы $\mathcal{A}$ из скалярных произведений слева ($j,k=1,\dots,n$) – это произведение квадратов модулей собственных значений (см. (31)). Надо показать, что определитель матрицы из выражений справа не превосходит $s_1^2\dots s_n^2$. Обозначим через $\mathcal{B}$ прямоугольную матрицу с элементами $s_l(f_j,e_l)$, где $j=1,\dots,n$, а l пробегает множество индексов s-чисел. Тогда

$$\mathcal{A}=\mathcal{B}\mathcal{B}^*.$$

Согласно формуле Бине–Коши[3]

$$\det\mathcal{A}=\sum_{1\le r_1<\dots<r_n<\infty}\mathcal{B}\begin{pmatrix}1&\dots&n\\ r_1&\dots&r_n\end{pmatrix}\mathcal{B}^*\begin{pmatrix}r_1&\dots&r_n\\ 1&\dots&n\end{pmatrix}, \tag{33}$$

где справа стоит произведение миноров порядка n соответствующих матриц на пересечении строк и столбцов с номерами, указанными в верхней и нижней строках соответственно. В нашем случае это произведение равно

$$s_{r_1}^2\dots s_{r_n}^2\left|\mathcal{C}\begin{pmatrix}1&\dots&n\\ r_1&\dots&r_n\end{pmatrix}\right|^2,$$

где $\mathcal{C}$ – матрица с элементами (f_j,e_l). Заменяя $s_{r_1}^2\dots s_{r_n}^2$ на $s_1^2\dots s_n^2$ (с учетом монотонности последовательности s-чисел), получаем, что правая часть в (33) не превосходит произведения $s_1^2\dots s_n^2$, умноженного на

$$\det\left[\sum(f_j,e_l)(e_l,f_k)\right]_{j,k=1}^n=\det\left[(f_j,f_k)\right]_{j,k=1}^n=1.\quad\square$$

Следствие.

$$\sum_{k=1}^n\ln|\lambda_k(T)|\le\sum_{j=1}^n\ln s_k(T). \tag{34}$$

[3] Она есть в книге Ф.Р. Гантмахера “Теория матриц” для конечной прямоугольной матрицы $\mathcal{B}$.

Следующая замечательная лемма из анализа содержится в книгах [ГК] и [ХЛП].[4]

Лемма 3. *Пусть* $\{a_k\}$ *и* $\{b_k\}$ *– две невозрастающие последовательности действительных чисел* $(k = 1, \ldots, \omega)$ *и*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{n} b_k \quad (n = 1, \ldots, \omega). \tag{35}$$

Пусть $\Phi(x)$ *– выпуклая вниз функция на оси с нулевым пределом при* $x \to -\infty$. *Тогда*

$$\sum_{k=1}^{n} \Phi(a_k) \leq \sum_{k=0}^{n} \Phi(b_k) \quad (n = 1, \ldots, \omega). \tag{36}$$

Теперь получается следующая *мажорантная теорема Вейля.*

Теорема 2. *Пусть* $f(x)$ *– функция на луче* $[0, \infty)$, *равная нулю в точке* 0 *и такая, что функция* $f(e^t)$ *на оси выпукла вниз. Тогда*

$$\sum_{k=1}^{n} f(|\lambda_k(T)|) \leq \sum_{k=1}^{n} f(s_k(T)). \tag{37}$$

Следствие 1. *Справедливы соотношения*

$$\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k(T)|^p \leq \sum_{k=1}^{n} s_k^p(T) \quad (p > 0), \tag{38}$$

$$\prod_{k=1}^{n} (1 + r|\lambda_k(A)|) \leq \prod_{k=1}^{n} (1 + r s_k(T)) \quad (r > 0). \tag{39}$$

Это частные случаи $f(x) = x^p$ и $f(x) = \ln(1+rx)$. После подстановки $x = e^t$ получаются функции с положительной второй производной. Чтобы получить (39), надо перейти от логарифмов произведений к самим произведениям.

Для дальнейшего нам понадобятся некоторые понятия и теоремы из теории целых аналитических функций. См. [М][5] или [Л][6].

Пусть $F(z)$ – целая функция. Ее *порядком* называется нижняя грань таких чисел ρ, что

$$|F(z)| \leq e^{|z|^\rho} \tag{40}$$

при достаточно больших $|z|$: $|z| \geq R(\rho)$.

Если справедливо неравенство

$$|F(z)| \leq C_1 e^{C_2 |z|^\rho} \tag{41}$$

[4] Г. Харди, Дж. Литтлвуд, Д. Полиа, Неравенства, 1948.
[5] А.И. Маркушевич, Теория аналитических функций, т. 2.
[6] Б.Я. Левин, Распределение корней целых функций, 1954.

при некоторых положительных C_1 и C_2, то говорят, что это целая функция (не выше чем) *порядка роста* ρ *и нормального типа.* А если это верно со сколь угодно малым C_2 (при этом C_1 зависит от C_2), то говорят, что она (не выше чем) *порядка роста* ρ *и минимального типа.*

Не всякая целая функция имеет конечный порядок. Например, e^{e^z} – целая функция бесконечного порядка. А функция e^{z^k} с натуральным k имеет порядок k и нормальный тип.

Пусть задана последовательность ненулевых комплексных чисел $\{a_n\}_1^\infty$, стремящаяся к бесконечности. Ее *показателем сходимости* называется нижняя грань таких чисел ρ, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^\rho} \tag{42}$$

сходится.

Эта величина не всегда конечна (пример $a_n = \ln n$) и может быть нулем (пример $a_n = e^n$). Для последовательности $\{n^\tau\}$ она равна $1/\tau$.

Если

$$a_n^{-1} = O(n^{-p}) \quad \text{или} \quad a_n^{-1} = o(n^{-p}), \tag{43}$$

то показатель сходимости последовательности $\{a_n\}$ не выше чем $\rho = 1/p$.