# Лекция 9

Целые функции можно разлагать в бесконечные произведения. Положим

$$G(u, q) = (1-u)e^{u+\frac{u^2}{2}+\dots\frac{u^q}{q}}. \tag{44}$$

Это так называемые *первичные множители.*

Справедлива следующая теорема Вейерштрасса (есть в [M]).

*Если $F(z)$ – целая функция, то она представима в виде*

$$F(z) = z^m e^{f(z)} \prod_{n=1}^{\omega} G\left(\frac{z}{a_n}, q_n\right) \tag{45}$$

*при некоторых $q_n$, где $f(z)$ – некоторая целая функция, $m$ – кратность нулевого корня функции $F(z)$ и $a_n$ – все ненулевые корни этой функции, занумерованные с учетом кратности $(n = 1, \dots, \omega;\ \omega \leq \infty)$.*

Роль экспоненциального множителя в (44) состоит в следующем. Рассмотрим логарифм первичного множителя. Так как

$$\ln(1-u) = -u - \frac{u^2}{2} - \dots,$$

то ряд

$$\ln G(u, q) = -\left(\frac{u^{q+1}}{q+1} + \dots\right) \tag{46}$$

начинается со слагаемого, которое может быть достаточно далеким. Это нужно для сходимости. (Абсолютная сходимость бесконечного произведения – это сходимость ряда из логарифмов модулей сомножителей.) Однозначности в (45) нет из-за произвола в выборе $q_n$.

Если $a_n$ имеют конечный показатель сходимости, то разложение упрощается: можно взять единое $q = q_n$, такое, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{q+1}}$$

сходится, а $f$ будет многочленом.

Произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty} G\left(\frac{z}{a_n}, q\right) \tag{47}$$

если оно равномерно сходится в любом конечном круге, называется *каноническим.* Число $q$ называется его *родом.* Если показатель сходимости последовательности $\{a_n\}$ меньше 1, то мы будем считать, что $q = 0$, т.е. опустим экспоненциальный множитель во всех первичных множителях.

Справедлива следующая теорема (есть в [M]):

*Порядок роста канонического произведения совпадает с показателем сходимости его корней.*

Для этой теоремы имеется следующее уточнение (есть в [Л]):

*Пусть $p = 1/\rho$ и $\rho$ – нецелое число. Тогда условие $1/a_n = O(n^{-p})$ необходимо и достаточно для того, чтобы каноническое произведение с нулями $a_n$ имело порядок роста не выше $\rho$ и нормальный тип. Условие $1/a_n = o(n^{-p})$ необходимо и достаточно для того, чтобы это каноническое произведение имело порядок роста не выше $\rho$ и минимальный тип.*

Замечание. В [Л] эти условия формулируются несколько иначе – в терминах "считающей функции" $n(r)$, равной числу точек $a_n$ в круге $O_r$ радиуса $r$ с центром в начале. Условия

$$|a_n^{-1}|n^p \le C, \quad |a_n^{-1}|n^p \to 0 \ \ (n \to \infty) \tag{48}$$

равносильны соответственно условиям

$$n(r)r^{-1/p} \le C_1, \quad n(r)r^{-1/p} \to 0 \ \ (r \to 0). \tag{49}$$

Грубое пояснение состоит в том, что мы полагаем в (48) $|a_n| = r$, $n = n(r)$.

Теперь мы выведем второе следствие из мажорантной теоремы Вейля (точнее, из (39)).

**Следствие 2.** *Пусть при некотором $p > 0$*

$$s_n(T) = O(n^{-p}) \quad \textit{или} \quad s_n(T) = o(n^{-p}). \tag{50}$$

*Тогда соответственно*

$$\lambda_n(T) = O(n^{-p}) \quad \text{или} \quad \lambda_n(T) = o(n^{-p}). \tag{51}$$

**Доказательство** следствия 2. Положим $p = 1/\rho$. При $\rho < 1$ положим

$$F_s(z) = \prod_{n=1}^{\infty}[1 + s_n(T)z], \quad F_\lambda(z) = \prod_{n=1}^{\infty}[1 + \lambda_n(T)z]. \tag{52}$$

Здесь, в частности, $q = 0$, а $p > 1$. В двух случаях (50) $F_s(z)$ является функцией не выше чем порядка роста $\rho$ и соответственно нормального или минимального типа. Тогда то же верно для $F_\lambda(z)$ в силу (39). Отсюда следуют оценки (51).

Если же $\rho > 1$, то надо взять целое $\nu > \rho$ и заменить числа $s_n(T)$, $\lambda_n(T)$ на $s_n^\nu(T)$, $\lambda_n^\nu(T)$. Приходим к тем же заключениям. □

### 3. Важнейшие классы компактных операторов

Здесь мы рассмотрим некоторые классы компактных операторов, выделяемые условиями на поведение их $s$-чисел $s_n$ при росте номера. Важнейшими эти классы можно считать по той причине, что они существенным образом используются в различных вопросах анализа и в особенности в спектральной теории эллиптических уравнений в частных производных.

**1. Классы Неймана–Шаттена.** Совокупность всех компактных операторов в $H$ принято обозначать через $\mathfrak{S}_\infty$. При любом $p > 0$ через $\mathfrak{S}_p$ обозначается совокупность всех компактных операторов $T$ со свойством

$$\sum [s_n(T)]^p < \infty. \tag{1}$$

Это *классы Неймана–Шаттена.* Ясно, что они расширяются с ростом $p$. Для операторов из этого класса вводится величина

$$|T|_p = \big[\sum [s_n(T)]^p\big]^{1/p}. \tag{2}$$

Очевидно, что при умножении оператора $T$ из $\mathfrak{S}_p$ на постоянную он остается в $\mathfrak{S}_p$ и $|cT|_p = |c||T|_p$.

Для операторов из $\mathfrak{S}_p$ согласно Следствию 1 в конце предыдущей лекции

$$\sum |\lambda_n(T)|^p \le |T|_p^p. \tag{3}$$

В частности, при $T \in \mathfrak{S}_1$ ряд из собственных значений оператора $T$ абсолютно сходится. Его сумма называется (спектральным) *следом оператора $T$* и обозначается через $\operatorname{tr} T$:

$$\operatorname{tr} T = \sum \lambda_n(T). \tag{4}$$

В силу (3)

$$|\operatorname{tr} T| \le |T|_1. \tag{5}$$

Английское название операторов из $\mathfrak{S}_1$ – *trace class operators.* Русское название – *ядерные операторы.* Возможно, название связано с тем, что часто такие операторы являются интегральными и след вычисляется как интеграл от ядра по диагонали:

$$Tu(x) = \int K(x,y)u(y)\,dy, \quad \operatorname{tr} T = \int K(x,x)\,dx. \tag{6}$$

(В случае многообразия (поверхности) здесь под $dy$ надо понимать $dS_y$ – "элемент площади".) Мы пока не приводим теорему о второй формуле в (6) с точной формулировкой.

Операторы класса $\mathcal{C}_2$ называются *операторами Гильберта–Шмидта.*

**Примеры.** В предыдущей лекции упоминалось, что для эллиптического псевдодифференциального оператора $T$ отрицательного порядка $-m$ на $n$-мерном замкнутом многообразии $M$ справедлива асимптотика

$$s_j(T) = cj^{-m/n} + o(j^{-m/n}).$$

Здесь имеется в виду гильбертово пространство $L_2(M)$. Отсюда следует, что такой оператор принадлежит $\mathfrak{S}_p$ при $mp/n > 1$, т.е. при $p > n/m$. Последнее получается вообще для любого ограниченного оператора из $H^0(M)$ в $H^m(M)$. Например, ПДО порядка $-1$ принадлежит $\mathfrak{S}_p$ при $p > n$. Его степень $T^k$ является ядерным оператором при $k > n$.

Аналогичные утверждения справедливы для операторов, обратным к операторам, отвечающих эллиптическим граничным задачам в ограниченной $n$-мерной области $G$, и вообще к операторам, действующим ограниченным образом из $H^0(G)$ в $H^m(G)$. Здесь имеется в виду гильбертово пространство $L^2(G)$. Например, оператор, обратный к оператору Лапласа с однородным условием Дирихле, принадлежит $\mathfrak{S}_p$ при $2p/n > 1$, т.е. при $p > n/2$. При $n = 3$ это оператор Гильберта–Шмидта.

В $L_2(M)$ или $L_2(G)$, как мы увидим, операторы Гильберта–Шмидта – это в точности интегральные операторы (см. первое равенство в (6)) с квадратично интегрируемым ядром:

$$\iint |K(x,y)|^2\, dx\, dy < \infty.$$

Разумеется, каждый ядерный оператор – это оператор Гильберта–Шмидта. Но ядра интегральных ядерных операторов "лучше". Здесь уместно упомянуть, что справедливы следующие *теоремы Агмона об интегральном предствлении операторов отрицательного порядка* на многообразии или в ограниченной области (см. [А III,8], здесь мы приводим грубые формулировки). В доказательствах не используются оценки $s$-чисел.

*Если $T$ – интегральный оператор, действующий ограниченным образом из $H^0$ в $H^m$, то при $m > n/2$ это интегральный оператор с квадратично интегрируемым ядром, а при $m > n$ ядро непрерывно.*

Далее мы в значительной степени следуем [ДШ].[1]

**Предложение 1.** *Сумма двух операторов $T_1$, $T_2$ из $\mathfrak{S}_p$ принадлежит $\mathfrak{S}_p$, и справедливы неравенства*

$$|T_1 + T_2|_p \le 2^{1/p}(|T_1|_p + |T_2|_p) \quad (p \ge 1), \tag{7}$$

$$|T_1 + T_2|_p^p \le 2(|T_1|_p^p + |T_2|_p^p) \quad (0 < p < 1). \tag{8}$$

Из (8) следует, что при $0 < p < 1$

$$|T_1 + T_2|_p \le c(|T_1|_p + |T_2|_p), \tag{9}$$

где $c = 4^{1/p}$. Неравенство вида (9) означает, что $|\cdot|_p$ – *квазинорма* и $\mathfrak{S}_p$ – линейное *квазинормированное* пространство (для квазинормы справедливы обычные свойства нормы, кроме неравенства треугольника, которое "подпорчено" наличием множителя $c$). Из (7) видно, что это верно и при $p \ge 1$, но на самом деле, как мы увидим, при $p \ge 1$ можно избавиться от множителя $2^{1/p}$, так что в этом случае $\mathfrak{S}_p$ – линейное нормированное пространство.

[1] Н. Данфорд и Дж. Шварц, Линейные операторы, том 2, Спектральная теория, Мир, 1966.

**Доказательство** предложения 1. Положим $T = T_1 + T_2$. Мы знаем, что

$$s_{2n+1}(T) \leq s_{n+1}(T_1) + s_{n+1}(T_2).$$

Пусть $p \geq 1$. Применяя неравенство Минковского (неравенство треугольника для $l_p$-нормы последовательности), получаем

$$\left[\sum s_{2n+1}(T)]^p\right]^{1/p} \leq |T_1|_p + |T_2|_p.$$

Аналогично, поскольку $s_{2n+2}(T) \leq s_{2n+1}(T)$,

$$\left[\sum s_{2n+2}(T)]^p\right]^{1/p} \leq |T_1|_p + |T_2|_p.$$

Возводим обе части в этих неравенствах в степень $p$ и складываем. Остается извлечь корень степени $p$ из обеих частей.

Пусть теперь $0 < p < 1$. Тогда при неотрицательных $x$, $y$ справедливо неравенство

$$(x+y)^p \leq x^p + y^p. \tag{10}$$

Оно получается так. Достаточно показать, что

$$(t+1)^p \leq t^p + 1 \text{ при } t \geq 0.$$

При $t = 0$ имеет место равенство, а при $t > 0$ производная левой части меньше, чем производная правой, и можно воспользоваться формулой Лагранжа. Используя (10) вместо неравенства Минковского, получаем (8) (проверьте самостоятельно). $\square$

**Предложение 2.** *При $T_1 \in \mathfrak{S}_{p_1}$, $T_2 \in \mathfrak{S}_{p_2}$ оператор $T_1T_2$ принадлежит $\mathfrak{S}_p$, где*

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p} \tag{11}$$

*и справедливо неравенство*

$$|T_1T_2|_p \leq 2^{1/p}|T_1|_{p_1}|T_2|_{p_2}. \tag{12}$$

Это получается аналогично (7) при помощи известного нам неравенства

$$s_{2n+1}(T_1T_2) \leq s_{n+1}(T_1)s_{n+1}(T_2),$$

такого же неравенства для $s_{2n+2}(T_1T_2)$ и неравенства Гёльдера

$$\left[\sum |\alpha_k\beta_k|^p\right]^{1/p} \leq \left[\sum |\alpha_k|^{p_1}\right]^{1/p_1}\left[\sum |\beta_k|^{p_2}\right]^{1/p_2}$$

(проверьте самостоятельно).

**Следствие.** *Произведение двух операторов Гильберта–Шмидта является ядерным оператором.*

Если $B$ – ограниченный оператор, то $s_n(BT) \le \|B\| s_n(T)$ и то же верно для $s_n(TB)$. Поэтому если $T$ принадлежит $\mathfrak{S}_p$, то $BT$ и $TB$ тоже принадлежат $\mathfrak{S}_p$, так что $\mathfrak{S}_p$ – *двусторонний идеал в кольце* $B(H)$ всех ограниченных операторов в $H$. Последнее верно и для $\mathfrak{S}_\infty$.

Далее нам понадобится следующее неравенство, доказанное на лекции 7:

$$|s_n(T_1) - s_n(T_2)| \le |T_1 - T_2|. \tag{13}$$

**Предложение 3.** *Пространство* $\mathfrak{S}_p$ *полно при всех* $p$.

**Доказательство** похоже на доказательство полноты пространства $l_p$. Пусть последовательность операторов $T_n$ из $\mathfrak{S}_p$ фундаментальна по квазинорме $|\cdot|_p$. Тогда она фундаментальна по обычной операторной норме, так как эта норма совпадает с первым $s$-числом. Предел по обычной норме существует (так как $B(H)$ – полное пространство) и является компактным оператором (как предел по операторной норме последовательности компактных операторов). Обозначим предел через $T$. Из

$$\left[\sum_1^\infty s_k(T_n - T_m)^p\right]^{1/p} < \varepsilon \quad (m, n \ge N = N(\varepsilon))$$

следует, что

$$\left[\sum_1^M s_k(T_n - T_m)^p\right]^{1/p} < \varepsilon$$

при любом $M$. Используя (13) и сходимость $T_n - T_m \to T_n - T$ по операторной норме при $m \to \infty$, получаем

$$\left[\sum_1^M s_k(T_n - T)^p\right]^{1/p} \le \varepsilon \quad (n \ge N)$$

при любом $M$, так что

$$|T_n - T|_p = \left[\sum_1^\infty s_k(T_n - T)^p\right]^{1/p} \le \varepsilon \quad (n \ge N).$$

Отсюда ясно, что $T \in \mathfrak{S}_p$ и $|T_n - T|_p \to 0$. $\square$

Как известно, конечномерные операторы плотны в $\mathfrak{S}_\infty$.

**Предложение 4.** *Конечномерные операторы образуют всюду плотное подмножество в каждом* $\mathfrak{S}_p$.

**Доказательство.** Возьмем $n$-ю частную сумму разложения Шмидта для оператора $T$:

$$T_n u = \sum_1^n s_j (u, e_j) f_j. \tag{14}$$

Это $n$-мерный оператор, у него первые $n$ $s$-чисел такие же, как у $T$, остальные – нули, и ясно, что

$$|T - T_n|_p^p = \sum_{n+1}^{\infty} [s_k(T)]^p \to 0 \quad (n \to \infty). \quad \square$$

**Замечание.** Для операторов (14) очевидным образом получаются соотношения

$$\|T - T_n\| \to 0 \quad \text{и} \quad |T_n|_p \to |T|_p \quad (n \to \infty).$$