Лекция 1. Оператор Дирака и его приложения

Часть I. Оператор Дирака

I.1 Задача Дирака

Дано: Уравнение

$$\Box u \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) u = 0$$

$\Box$ — оператор Даламбера (Лапласа) в лоренцевской метрике

$$dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Требуется: **найти дифференциальный оператор $\not{D}$ первого порядка**:

$$\Box = \not{D}^2$$

Решение: (риманова метрика $dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$)

$$-\sum\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^2 = \left(\sum e_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right)^2$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{e_j e_k + e_k e_j = -2\delta_{kj}}$$

$\Rightarrow$ решений в числах нет!

Частное решение (*матрицы Дирака* 4×4):

$$e_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad e_j = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix}$$

где

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

— матрицы Паули.

I.2 Уравнение Клиффорда:

$$\boxed{e_j e_k + e_k e_j = -2\delta_{kj}} \quad (*)$$

Опр. $\mathrm{Cl}(\mathbb{C}^4) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}\Big/(*)$ — *комплексная алгебра Клиффорда.*

Факты:

1) Матрицы Дирака дают *спинорное представление* $c : \mathrm{Cl}(\mathbb{C}^4) \to \mathrm{End}(\mathbb{C}^4)$, решение уравнения (*).

2) любое другое представление (решение) кратно спинорному.

Многомерный случай:

0) определяется $\mathrm{Cl}(\mathbb{C}^n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$;

1) $\mathrm{Cl}(\mathbb{C}^{2k})$ имеет *спинорное представление* (неприводимое):

$$c : \mathrm{Cl}(\mathbb{C}^{2k}) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{End}(S), \qquad \dim S = 2^k.$$

Векторы пространства S — *спиноры.* Оператор Дирака имеет вид:

$$\boxed{\not{D} = \sum_{j=1}^{2k} c(e_j) \frac{\partial}{\partial x_j} : C^\infty(\mathbb{R}^{2k}, S) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^{2k}, S)}$$

2) любое другое представление (решение) кратно спинорному.

3) (*киральность*) ориентация в $\mathbb{R}^{2k}$ $\Rightarrow$ расщепление:

$$\not{D} = \begin{pmatrix} 0 & \not{D}_+^* \\ \not{D}_+ & 0 \end{pmatrix} : \begin{array}{c} C^\infty(\mathbb{R}^{2k}, S_+) \\ \oplus \\ C^\infty(\mathbb{R}^{2k}, S_-) \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} C^\infty(\mathbb{R}^{2k}, S_+) \\ \oplus \\ C^\infty(\mathbb{R}^{2k}, S_-), \end{array}$$

где $S = S_+ \oplus S_-$ — собственные подпространства инволюции:

$\omega = i^k c(e_1) c(e_2) \ldots c(e_{2k}), \qquad e_1 \ldots e_{2k}$ — ориентированный базис в $\mathbb{R}^{2k}$.

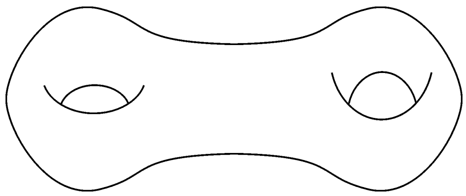
Пример. Оператор Дирака в $\mathbb{R}^2$ и оператор Коши–Римана:

$$\not{D} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{pmatrix}$$

$\not{D}_+ = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y} \equiv \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ — оператор Коши–Римана.

I.3 Оператор Дирака на многообразии

(M, g) —
риманово многообразие



$\Delta \, : \, C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ —
оператор Лапласа

$$\boxed{\Delta u = g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} u}$$

Опр. $\not{D}$ — *оператор типа Дирака* $\Leftrightarrow$ $\boxed{-\Delta \equiv \not{D}^2 \ (\mathrm{mod}\ \text{младш.члены})}$

$\boxed{\Rightarrow}$

• В каждой точке $x \in M$ — представление алгебры Клиффорда $\mathrm{Cl}(T_x M)$.

• Глобально:
$$\not{D} : C^\infty(M, S) \longrightarrow C^\infty(M, S),$$

где S — расслоение модулей над алгебрами Клиффорда.

Опр. $\not{D}$ — *оператор Дирака* $\Leftrightarrow$ $\dim S$ — минимальна ($= 2^{\dim M/2}$) + условие на младшие члены (правило Лейбница)

Сечения расслоения S — *спиноры.*

Замечание. Как и в плоском случае есть разбиение:

$$\not{D} = \begin{pmatrix} 0 & \not{D}_+^* \\ \not{D}_+ & 0 \end{pmatrix} : \begin{matrix} C^\infty(M, S_+) \\ \oplus \\ C^\infty(M, S_-) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} C^\infty(M, S_+) \\ \oplus \\ C^\infty(M, S_-) \end{matrix}$$

разбиение $S = S_+ \oplus S_-$ определяется как и выше

Замечание. Равенство $-\Delta = \not{D}^2$ в редких случаях (препятствие — кривизна)

$\not{D}$ — *полный* оператор Дирака, $\not{D}_+$ *киральный* оператор Дирака

I.4 Произвольный (геометрический) оператор есть оператор Дирака

M^{2n} — четномерное риманово многообразие

• **оператор Эйлера**

$$\boxed{d + d^* : \Lambda^{ev}(M) \longrightarrow \Lambda^{odd}(M)}$$

(из четных в нечетные дифференциальные формы)

• **оператор сигнатуры**

$$\boxed{\mathcal{H} := d + d^* : \Lambda^{+}(M) \longrightarrow \Lambda^{-}(M)}$$

$\Lambda^{\pm}(M) \subset \Lambda(M)$ — собств. подпространства инволюции

$$\alpha\omega^k = i^{n+k(k-1)} * \omega^k; \qquad \omega^k \in \Lambda^k(M)$$

• **оператор Коши–Римана (Тодда)** комплексное многообразие

$$\boxed{\overline{\partial} + \overline{\partial}^* : \Lambda^{0,ev}(M) \longrightarrow \Lambda^{0,odd}(M)}$$

$\Lambda^{0,k}(M)$ — антиголоморфные формы (порождены $d\overline{z}_j$).

всё это операторы Дирака:

$$\not{D}_+ \otimes 1_E : C^\infty(M, S_+ \otimes E) \longrightarrow C^\infty(M, S_- \otimes E)$$

скрученные при помощи подходящего векторного расслоения E:

Эйлер	$E = S_+ - S_-$
сигнатура	$E = S$
Тодд	$E = \sqrt{\Lambda^{0,n}(M)}$ — для кэлерова многообразия. ($\Lambda^{0,n}(M)$ — одномерное расслоение)

...

Оператор Дирака на многообразии был построен Атьей и Зингером при решении проблемы индекса.

Часть II. Индекс оператора Дирака

II.1 Эллиптические операторы

Уравнение

$\boxed{Du = f}$

u, f — функции от $(x_1, \ldots, x_n)$

$$D = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha$$

m — порядок оператора,
$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс

Когда уравнение *фредгольмово*? Т.е. однозначно разрешимо по модулю конечномерных подпространств:

$$\dim\ker D < \infty, \dim\operatorname{coker} D < \infty$$

Опр. *Главный символ оператора* D

$$\boxed{\sigma(D)(x,p) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x) p^\alpha, \quad p \in \mathbb{R}^n}$$

Оператор D на многообразии M $\Rightarrow$ $\sigma(D)$ на кокасат. расслоении T^*M

Опр. D *эллиптический*, если $\sigma(D)(x,p) \neq 0$ при $p \neq 0$.

Теорема (конечности)

$\boxed{D \text{ — эллиптический}} \Rightarrow \boxed{D \text{ — фредгольмов}}$

Опр. $\operatorname{ind} D := \dim\ker D - \dim\operatorname{coker} D$

— *индекс* эллиптического оператора.

индекс — гомотопический инвариант оператора

Пример. Оператор Дирака $\not{D}_+$ — эллиптичен.

Док-во. $\not{D}^2 \equiv -\Delta \Rightarrow \sigma(\not{D})^2 = -\sigma(\Delta) = |p|^2$.

II.2 Проблема индекса

Проблема индекса: (И.М. Гельфанд 1960)

$$\boxed{\text{найти формулу для } \operatorname{ind} D \text{ в топологических терминах}}$$

т.е. надо вычислить *бесконечномерный* гомотопический инвариант в терминах *конечномерных* инвариантов.

Замечание. Эйлерова характеристика, сигнатура, эйлерова характеристика комплексного многообразия — индексы соотв. операторов

Формулу получили Атья–Зингер, 1962.

1966 Атья филдс.медаль
2004 А. и З. премия Абеля

Использовали топологические методы: K-теория, Характ.классы, Теорема Римана–Роха...

Цель курса - показать, как индекс оператора Дирака может быть вычислен прямым методом (Гецлер 1982).

II.3 Вычисление индекса

$\boxed{1}$ **Формула Зингера–Маккина**

$$\boxed{\operatorname{ind} D = \operatorname{Tr}_s e^{-t\mathcal{D}^2} \quad \forall t > 0}$$

где $\mathcal{D} := \begin{pmatrix} 0 & D^* \\ D & 0 \end{pmatrix}$, $\quad \operatorname{Tr}_s \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := \operatorname{Tr} a - \operatorname{Tr} d$ — *суперслед.*

Док-во:

1) Суперсимметрия: для операторов D^*D и DD^* **ненулевые** собственные значения (с кратностями) совпадают:

$$\begin{matrix} D^*Du = \lambda^2 u \\ \lambda \neq 0 \end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{matrix} DD^*(Du) = \lambda^2 Du \\ Du \neq 0. \end{matrix}$$

2) разложение по собственным векторам даёт:

$$\operatorname{Tr} e^{-tD^*D} = \sum_{\lambda \neq 0} e^{-t\lambda^2} m_\lambda \quad + \dim\ker D$$

$$\operatorname{Tr} e^{-tDD^*} = \quad \text{——} \; || \; \text{——} \quad + \dim\ker D^*$$

3) $\operatorname{ind} D = \dim\ker D - \dim\ker D^*$.

II.3 Вычисление индекса

$\boxed{2}$ **Представление через ядро Шварца**

$$\mathrm{Tr}_s\, e^{-t\mathcal{D}^2} = \int\limits_M [\mathrm{tr}_s\, K_t(x,x)]\, dx$$

- tr_s - суперслед в точке $x \in M$.
- $K_t(x,y)$ — ядро Шварца оператора $e^{-t\mathcal{D}^2}$ (t фиксировано):

$$K_t(x,y) = \sum_\lambda e^{-t\lambda^2} \varphi_\lambda(x) \varphi^*_\lambda(y)$$

где φ_λ — собственный вектор оператора $\mathcal{D}^2$.

$\boxed{3}$ **Уравнение теплопроводности**: ядро $K_t(x,y)$ — решение задачи Коши

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} K_t = -\mathcal{D}^2 K_t \\ K_0(x,y) = \delta(x-y) I \end{cases}}$$

В плоском пространстве:
(когда $\mathcal{D}^2 = -\Delta$)
$$K_t(x,y) = \frac{1}{(4\pi t)^{\dim M/2}} e^{-\dfrac{(x-y)^2}{4t}}$$

Можно получить асимптотическое разложение (при малых t):

$$[\mathrm{tr}_s\, K_t(x,x)]\, dx \sim t^{-\dim M/2} \left(\sum_{j \geq 0} \omega_j t^j \right)$$

Локальная теорема об индексе

(Атья–Ботт–Патоди & Гилки)

Пусть $D = \not{D}_+$ — оператор Дирака на многообразии M^{2n}, тогда

1. $\mathrm{tr}_s\, K_t(x,x)$ — конечен при $t \to 0$.

2. $$\boxed{\begin{gathered} \lim_{t\to 0} \mathrm{tr}_s\, K_t(x,x) dx = (2\pi i)^{-n/2} \widehat{A}(M)_{2n} \\ \widehat{A}(M) := \det{}^{1/2} \left(\frac{\Omega/2}{\mathrm{sh}\, \Omega/2} \right) \in \Lambda^{ev}(M) \end{gathered}}$$

$\Omega = \frac{1}{2} R^k_{imj} dx^m \wedge dx^j$ — *форма кривизны* многообразия (R — тензор Римана)

Интегрированием по многообразию получаем следствие:

Теорема (Атья–Зингер):

$$\boxed{\operatorname{ind} \not{D}_+ = (2\pi i)^{-n} \int\limits_M \widehat{A}(M)}$$

Замечание. Можно вычислить и индекс оператора Дирака с коэффициентами:

$$\operatorname{ind} \not{D}_+ \otimes 1_E = (2\pi i)^{-n} \int\limits_M \widehat{A}(M) \operatorname{ch} E,$$

где $\operatorname{ch} E = \operatorname{tr} \exp(-\nabla^2)$ — характер Черна комплексного расслоения E со связностью ∇.

II.4 Индексы геометрических операторов:

A. Оператор Тодда ($n = \dim_{\mathbb{C}} M$, Ω_+ — кривизна расслоения $T^{1,0}M$):

$$\begin{aligned}
\operatorname{ind}(\overline{\partial} + \overline{\partial}^*) &= (2\pi i)^{-n} \int\limits_M \widehat{A}(M) \operatorname{ch}(\sqrt{\Lambda^{0,n}(M)}) \\
&= (2\pi i)^{-n} \int\limits_M \det \left(\frac{\Omega_+}{e^{\Omega_+/2} - e^{-\Omega_+/2}} \right) \times \exp\left(-\operatorname{tr} \Omega_+/2\right) \\
&= (2\pi i)^{-n} \int\limits_M \det \left(\frac{\Omega_+}{e^{\Omega_+} - 1} \right) \equiv \boxed{(2\pi i)^{-n} \int\limits_M \operatorname{Td}(M)}
\end{aligned}$$

Теорема Римана–Роха–Хирцебруха:

$$\chi(M, \mathcal{O}(M)) = (2\pi i)^{-n} \int\limits_M \operatorname{Td}(M)$$

здесь $\chi(M, \mathcal{O}(M)) = \operatorname{ind}(\overline{\partial} + \overline{\partial}^*)$ — эйлерова характеристика комплекса Дольбо.

B. Оператор сигнатуры:

$$\operatorname{ind}\bigl(d+d^* : \Lambda^+ \to \Lambda^-\bigr) = (2\pi i)^{-n} \int\limits_M \widehat{A}(M)\,\operatorname{ch} S =$$

$$(2\pi i)^{-n} \int\limits_M \det{}^{1/2}\left(\frac{\Omega/2}{\operatorname{sh}\Omega/2}\right) \times 2^n \det{}^{1/2}(\operatorname{ch}\Omega/2) =$$

$$= (\pi i)^{-n} \int\limits_M \det{}^{1/2}\left(\frac{\Omega/2}{\operatorname{th}\Omega/2}\right) \equiv \boxed{(\pi i)^{-n} \int\limits_M L(M)}.$$

Теорема Хирцебруха о сигнатуре:

$$\sigma(M) = (\pi i)^{-n} \int\limits_M L(M).$$

C. Оператор Эйлера: $n = \dim M$

$$\operatorname{ind}\bigl(d+d^* : \Lambda^{ev}(M) \to \Lambda^{odd}(M)\bigr) = (2\pi i)^{-n} \int\limits_M \widehat{A}(M)\,\operatorname{ch}(S_+ - S_-)$$

$$= (2\pi i)^{-n} \int\limits_M \widehat{A}(M) \times i^n[\widehat{A}(M)]^{-1}\operatorname{Pf}(-\Omega) = \boxed{(2\pi)^{-n} \int\limits_M \operatorname{Pf}(-\Omega)}$$

Pf — *пфаффиан* кососимметрической матрицы:

$$\operatorname{Pf}(a_{ij}) e^1 \wedge e^2 \wedge \ldots e^{2k} = \frac{1}{k!}\bigl(a_{ij} e^i \wedge e^j\bigr)^k$$

Теорема Гаусса-Бонне–Черна:

$$\chi(M) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_M \operatorname{Pf}(-\Omega) \equiv (2\pi)^{-n/2} \int\limits_M e(M)$$

$e(M)$ — класс Эйлера.

II.4 Применение к общей проблеме индекса

I. Сведение к оператору Дирака:

Утверждение (Атья–Зингер): $\forall$ эллиптический оператор D стабильно гомотопен оператору Дирака $\not{D}_+ \otimes 1_E$ с некоторыми коэффициентами

$D \sim D'$ — *стабильно гомотопны*	$\Leftrightarrow$	$D \oplus \Delta$ гомотопен $D' \oplus \Delta'$ Δ, Δ' — Лапласианы

Спинорные многообразия!

II. Поэтому достаточно:

1) придумать формулу индекса для произвольного оператора;

2) проверить её на операторе Дирака <u>с коэффициентами</u>.

Часть III (Некоторые) Приложения

III.1 Двойственность Пуанкаре в K-теории

(Атья 1970)

M — замкнутое многообразие

$\boxed{\begin{array}{c} K^0(M) \simeq K_0(M) \\ \text{— \textit{изоморфизм Пуанкаре}} \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{c} \text{на } M \text{ существует} \\ \text{оператор Дирака} \\ (\mathrm{spin}^c\text{-\textit{многообразия}}) \end{array}}$

- $K^0(M)$ — топологическая K-теория Атьи–Хирцебруха;
- $K_0(M)$ — *двойственная* обобщенная теория гомологий:

$$K_0(M) := K^0(\mathbb{R}^{2N+1} \setminus M).$$

Более того, имеются:

1) аналитическая реализация группы $K_0(M)$:

Опр. $\boxed{\begin{array}{c} D : H_1 \longrightarrow H_2 \text{ —} \\ \text{\textit{обобщенный}} \\ \text{эллиптический} \\ \text{оператор} \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} \text{1) гильбертовы пространства } H_{1,2} \\ \text{— } *\text{-модули над алгеброй } C(M) \\ \text{2) } D \text{ — фредгольмов,} \\ \text{3) } \forall f \in C(M) \text{ компактен} \\ \qquad \text{коммутатор } [D, f] \end{array}}$

Теорема. $K_0(M) \simeq \left\{ \begin{array}{c} \text{обобщенные эллиптические операторы} \\ \text{по модулю стабильных гомотопий} \end{array} \right\}$

2) *изоморфизм Пуанкаре*:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} K^0(M) & \longrightarrow & K_0(M) \\ E & \mapsto & \not{D} \otimes 1_E \\ & & \\ \text{векторное} & & \text{оператор Дирака} \\ \text{расслоение} & & \text{с коэффициентами} \end{array}}$$

другими словами: $\boxed{\text{Оператор Дирака}} = \boxed{\begin{array}{l} \text{фундаментальный} \\ \text{цикл в } K_0\text{-группе} \end{array}}$

Замечание. Аналогично в K-теории вещественных расслоений.

...

гипотеза Новикова, некоммутативная геометрия, теория Каспарова...

III.2 Проблема положительной скалярной кривизны

(Громов, Лоусон 1982)

для простоты $g_{ij}(x_0) = \delta_{ij}$

Кривизна Римана : $R^i_{jkl}(x_0) = R_{ijkl}(x_0) = \frac{1}{2}\left(\partial^2_{ik} g_{jl} + \partial^2_{lj} g_{ik} - \partial^2_{il} g_{jk} - \partial^2_{jk} g_{il}\right)(x_0)$

Кривизна Риччи : $R_{jl} = R^i_{jil}$

Кривизна скалярная : $R = g^{jl} R_{jl}$

$R = R(g)$ — слабейший инвариант (полный в двумерном случае)

Теорема (Каждан–Уорнер) $\boxed{\text{Любая функция } f \in C^\infty(M) \text{ отрицательная в некоторой точке является скалярной кривизной некоторой метрики на } M}$

Вопрос (Громов–Лоусон) $\boxed{\text{Когда на } M \text{ существует метрика } g \text{ для которой } R(g) > 0 \text{ всюду?}}$

Теорема (Штольц 1990 — доказал гипотезу Громова–Лоусона)

Пусть M^{4k} спинорное многообразие и $\pi_1(M) = 0$

$\boxed{\text{на } M \text{ существует метрика всюду положительной скалярной кривизны}} \Leftrightarrow \boxed{\operatorname{ind} \not{D}_+ = 0}$

Связь с оператором Дирака:

$$\boxed{\not{D}^2 = -\Delta + \frac{R}{4}}$$

поэтому если $R > 0 \Longrightarrow \not{D}_+$ — обратим.

...

исследуется случай неодносвязных многообразий (Громов–Лоусон–Розенберг),...

III.3 Приложение в топологии: сигнатуры четырехмерных многообразий

Пусть M — четырехмерное спинорное многообразие.

1. Используя **оператор сигнатуры**, получаем

$$\sigma(M) = \operatorname{ind}(\text{операт. сигнатуры}) =$$
$$= -\int\limits_M \frac{\operatorname{tr}\Omega^2}{24\pi^2} \equiv \frac{p_1(M)}{3}, \qquad p_1(M) \in \mathbb{Z} \text{ — число Понтрягина.}$$

$\boxed{\Rightarrow}$

Теорема (целочисленности) $p_1(M)$ делится на 3.

2. Используем **оператор Дирака**:

$$\operatorname{ind} D\!\!\!/_+ = -\int\limits_M \frac{\operatorname{tr}\Omega^2}{192\,\pi^2} = \frac{p_1(M)}{24} = \frac{\sigma(M)}{8}.$$

$\boxed{\Rightarrow}$

Теорема (целочисленности) $p_1(M)$ для спинорного многообразия делится на 24, сигнатура делится на 8.

Теорема (Рохлин)

$\boxed{M^4 \text{ — спинорное многообразие}} \Rightarrow \boxed{\text{сигнатура делится на 16}}$

Док-во.

1. В размерности 4 оператор Дирака *кватернионно-линеен.*
2. Поэтому его индекс чётен.
3. $\sigma(M) = 8 \operatorname{ind} D\!\!\!/_+$.

Замечание. Существует спинорное *топологическое* многообразие N^4, для которого $\sigma(N^4) = 8$. По теореме Рохлина получаем, что на N^4 нельзя ввести гладкую структуру.

...

III.4 Эллиптический род

(Ошанин, Виттен, Ландвебер-Стонг,...)

Опр. $\boxed{\text{род } \varphi \text{ многообразий}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{ll} \text{(мультипл.)} & \varphi(M \times N) = \varphi(M)\varphi(N) \\ \text{(кобордизм)} & \varphi(\partial W) = 0. \end{array}}$

(описание родов, 60-е годы Хирцебрух):

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{род } \varphi \\ \text{ориентированных} \\ \text{многообразий} \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} \textit{логарифм рода} \\ \log_\varphi(x) = \sum \dfrac{\varphi(\mathbb{CP}^{2n})}{2n+1} x^{2n+1} \\ \text{формальный степенной ряд} \end{array}}$$

Пример. $\varphi(M) = \sigma(M) \Rightarrow$

$$\log_\varphi = \sum \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} = \int_0^x \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$$

Опр. $\boxed{\begin{array}{c} \text{род } \varphi \text{ — } \textit{сильно} \\ \textit{мультипликативен} \end{array}} \Leftrightarrow$

для всех расслоений $E \to B$ на спинорные многообразия: $$\varphi(E) = \varphi(B)\varphi(F),$$ с компактной *связной* структурной группой.

Теорема.

(Ошанин, Таубс)

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{род } \varphi \text{ — } \textit{сильно} \\ \textit{мультипликативен} \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} \text{род } \textit{эллиптический}\text{, т.е. логарифм} \\ \text{— эллиптическая функция:} \\ \log_\varphi = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - 2\delta t^2 + \varepsilon t^4}} \end{array}}$$

Например:

$\delta = 1/4, \varepsilon = 1/16 \Rightarrow \log \varphi = \int_0^x \frac{dt}{1-t^2}$ $\boxed{\text{получаем сигнатуру}}$

Можно ли интерпретировать эллиптические рода как индексы некоторых эллиптических операторов?

1. Формальный степенной ряд:

$$\Phi(M) = \int\limits_M L(M)\,\mathrm{ch}\left(\bigotimes_{l=1}^{\infty} S_{q^l}(TM) \otimes \bigotimes_{m=1}^{\infty} \Lambda_{q^m}(TM)\right) =$$

$$= \mathrm{ind}(\text{опер.сигнат.}) \otimes \left(\bigotimes_{l=1}^{\infty} S_{q^l}(TM) \otimes \bigotimes_{m=1}^{\infty} \Lambda_{q^m}(TM)\right) \in \mathbb{Q}[[q]]$$

где $S_t(E) = 1+tE+t^2S^2(E)+\ldots$, $\Lambda_t(E) = 1+tE+t^2\Lambda^2(E)+\ldots$, определяет аналитическую функцию параметра.

2. Значения параметра q параметризуют все эллиптические рода.

(эвристический) подход Виттена:

$$\boxed{\Phi(M) = \mathrm{ind}\,\mathcal{H}}$$

1) $\mathcal{H}$ — "оператор сигнатуры" на пространстве петель

$$\mathcal{L}M = \{\gamma : \mathbb{S}^1 \to M\}$$

2) оператор $\mathcal{H}$ инвариантен относительно действия окружности $\mathbb{S}^1$ на петлях (сдвиг параметра);

3) индекс $\mathbb{S}^1$-инвариантного оператора — функция на окружности

$$(\mathrm{ind}\,\mathcal{H})(g) := \mathrm{Tr}\Big(g : \ker\mathcal{H} \longrightarrow \ker\mathcal{H}\Big) - \mathrm{Tr}\Big(g : \ker\mathcal{H}^* \longrightarrow \ker\mathcal{H}^*\Big), \qquad g \in \mathbb{S}^1$$

(при $g = 1$ — обычный индекс)

4) ряд $\Phi(M)$ — ряд Фурье функции $\mathrm{ind}\,\mathcal{H}$

Эвристический подход позволил:

• доказать мультипликативность эллиптических родов в терминах оператора $\mathcal{H}$.

• построить оператор Дирака на пространстве петель. Его индекс:

$$\boxed{\varphi(M) = \int\limits_M A(M)\,\mathrm{ch}\left(\bigotimes_{l=1}^{\infty} S_{q^l}(TM - \dim M)\right) \in \mathbb{Q}[[q]]}$$

...

Гипотеза о положительной кривизне Риччи, эллиптические гомологии...