Лекция 2. Алгебры Клиффорда, спиноры и спинорные группы

Часть I. Алгебры Клиффорда

I.1. Определение

Мотивировка из вводной лекции (проблема Дирака):

$$-\sum \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^2 = \left(\sum e_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right)^2 \Leftrightarrow e_i e_j + e_j e_i = -2\delta_{ij} \qquad (*)$$

V — евклидово пространство со скалярным произведением $(,)$

Опр. *алгебра Клиффорда* $\mathrm{Cl}(V)$ — ассоциативная алгебра порожденная векторами $v \in V$ с соотношениями: $vw + wv = -2(v, w)$

если $\{e_i\}$ — ортонорм.базис $V \Rightarrow$ выполнено (*)

Замечание. Эквивалентное определение алгебры Клиффорда:

$\boxed{\mathrm{Cl}(V) = TV/I}$

здесь $TV = \oplus_{n\geq 0} V^n$ — *тензорная алгебра*; I — двусторонний идеал порожденный элементами $v \otimes v + |v|^2$

Утверждение. 1) $\dim \mathrm{Cl}(V) = 2^{\dim V}$, (аддитивный) базис:

$$e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_k}, \quad 1 \leq i_1 < i_2 \ldots < i_k \leq \dim V,$$

здесь $\{e_j\}$ — ортонормированный базис пространства V.

2) алгебра Клиффорда только $\mathbb{Z}_2$-градуирована — *четность* порядка тензоров:

$$\mathrm{Cl}(V) = \mathrm{Cl}_0(V) \oplus \mathrm{Cl}_1(V).$$

Док-во. Применяем перестановки вида $e_2 e_1 = -e_1 e_2$. $\square$

Сравнение с внешними формами:

$$\mathrm{Cl}(V) \text{ действует на } \Lambda(V)$$

$$c(v)w = v \wedge w - v \lrcorner w$$

$$\boxed{c^2(v)w =} (v \wedge - v\lrcorner)(v \wedge - v\lrcorner)w = \boxed{-|v|^2 w}$$

$$\Rightarrow \text{ действие продолжается с } V \text{ на } \mathrm{Cl}(V)$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \textit{символьное} & \sigma : \mathrm{Cl}(V) \xrightarrow{\simeq} \Lambda(V) \\ \textit{отображение} & \sigma(a) := c(a) \cdot 1 \end{array}}$$

Обратное отображение (в ортонормированном базисе):

$$\sigma^{-1}\big(e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}\big) = e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_k}.$$

Поэтому на линейном пространстве $\Lambda(V)$ есть 2 умножения:

— внешнее: $\alpha \wedge \omega$;

— клиффордово: $\alpha \circ \omega = \alpha \wedge \omega - \alpha \lrcorner \omega$.

Рассмотрим деформацию:

$$\alpha \circ_\varepsilon \omega = \alpha \wedge \omega - \varepsilon^2 \alpha \lrcorner \omega$$

При $\varepsilon \neq 0$ имеем алгебру Клиффорда: $v^2 = -\varepsilon^2 |v|^2$.

Поэтому

$$\boxed{\omega_1 \circ_\varepsilon \omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_2 + \{ \text{ младшие члены } \}}$$

Примеры:

0) $\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^0) = \mathbb{R}$;

1) $\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^1) = \mathbb{C} = \mathbb{R} + \mathbb{R}i$, $i^2 = -1$;

2) $\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{H} = \mathbb{R} + \mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$ — алгебра кватернионов ($i, j \in \mathbb{R}^2$, $k = ij$):

$$i^2 = j^2 = -1; ij + ji = 0;$$

3) $\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^3) = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$. Изоморфизм определяется формулой:

$$\{1, i, j, k\} \longmapsto \begin{array}{l} \left\{\frac{1+xyz}{2}, \frac{xy-z}{2}, \frac{yz-x}{2}, \frac{zx-y}{2}\right\} \\ \left\{\frac{1-xyz}{2}, \frac{xy+z}{2}, \frac{yz+x}{2}, \frac{zx+y}{2}\right\} \end{array}$$

4) $\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^4) =?$ (вычисления становятся громоздкими)

$\boxed{\textbf{Комплексные алгебры } \mathbb{C}\mathrm{l}(V) := \mathrm{Cl}(V) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \textbf{ устроены проще!}}$

Примеры (комплексные):

0) $\mathbb{C}\mathrm{l}(\mathbb{R}^0) = \mathbb{C}$

1) $\mathbb{C}\mathrm{l}(\mathbb{R}^1) = \mathbb{C} + \mathbb{C}v$, где $v^2 = -1 \Rightarrow$

$$\boxed{\mathbb{C}\mathrm{l}(\mathbb{R}^1) \simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}} \text{ с базисом } (1 \pm iv)/\sqrt{2}.$$

2) $\mathbb{C}\mathrm{l}(\mathbb{R}^2) = \mathrm{Mat}(2, \mathbb{C})$ с образующими (*матрицы Паули*):

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3) $\mathbb{C}\mathrm{l}(\mathbb{R}^3) = \mathrm{Mat}(2, \mathbb{C}) \oplus \mathrm{Mat}(2, \mathbb{C})$ с образующими

$$e_1 = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{pmatrix}; \; e_2 = \begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}; \; e_3 = \begin{pmatrix} \sigma_1\sigma_2 & 0 \\ 0 & -\sigma_1\sigma_2 \end{pmatrix}$$

4) $\mathbb{C}\mathrm{l}(\mathbb{R}^4) = \mathrm{Mat}(4, \mathbb{C})$, образующие — *матрицы Дирака*:

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \; \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \; \gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\dots$$

Гипотеза: $\boxed{\begin{array}{l} 1)\ \mathbb{C}\mathrm{l}(\mathbb{R}^{2n}) \simeq \mathrm{Mat}(2^n, \mathbb{C}); \\ 2)\ \mathbb{C}\mathrm{l}(\mathbb{R}^{2n+1}) \simeq \mathrm{Mat}(2^n, \mathbb{C}) \oplus \mathrm{Mat}(2^n, \mathbb{C}). \end{array}}$

Терминология: *Пространство спиноров S размерности* $2n$ это пространство представления

$$c : \mathbb{C}\mathrm{l}(\mathbb{R}^{2n}) \longrightarrow \mathrm{End}(S), \qquad \dim S = 2^n.$$

алгебры Клиффорда, для которого c — изоморфизм. Отображение c — *спинорное представление* (спин=spin — верчение).

I.2. Конструкция спинорного представления (Г.Вейль 1935)

Пусть $e_1, \dots, e_{2n}$ — ортогональный базис $V = \mathbb{R}^{2n}$

Определим разложение:

$$\boxed{\begin{array}{lccc} V \otimes \mathbb{C} = & P & \oplus & Q \\ & e_1 + ie_2 & & e_1 - ie_2 \\ & e_3 + ie_4 & & e_3 - ie_4 \\ & \dots & & \dots \end{array}} \qquad (1)$$

и положим $S := \Lambda(P)$ — алгебра Грассмана пространства P; действие на форме $\omega \in \Lambda(P)$

$$\boxed{\begin{array}{l} p \cdot \omega = \sqrt{2} p \wedge \omega, \quad p \in P, \\ q \cdot \omega = -\sqrt{2} q \lrcorner \omega, \quad q \in Q. \end{array}} \qquad (2)$$

Предложение. A) Выражение (2) корректно определено и продолжается до гомоморфизма алгебр

$$c : \mathbb{Cl}(V) \to \mathrm{End}(S); \qquad (3)$$

B) гомоморфизм (3) является изоморфизмом.

Док-во:

1) Корректность ($p \cdot \omega$, $q \cdot \omega \in \Lambda(P)$) — прямое вычисление;

2) продолжение до гомоморфизма алгебр следует из соотношений $p^2 = q^2 = 0$, $pq + qp = -2$ на базисных векторах (1).

3) изоморфность следует из a) равенства размерностей; b) прямой проверки тривиальности ядра $\ker c$:

$$\boxed{\begin{array}{c} x = p_1 A + p_1 q_1 B + C q_1 + D \\ x\omega = 0 \ \ \forall \omega = p_1 \wedge \omega_0 + \omega_1 \end{array}} \Rightarrow \boxed{A = B = C = D = 0}.$$

□

Пример. $n = 2$, $(\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{C}) = (e_1 + ie_2) \oplus (e_1 - ie_2)$

$$S = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \cdot 1 \left(\frac{e_1 + ie_2}{\sqrt{2}} \right)$$

$$c(xe_1 + ye_2) = x \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -x + iy \\ x + iy & 0 \end{pmatrix}$$

(матрицы Паули) В высших размерностях вместо символа Коши–Римана символ оператора Тодда.

I.3. Разложения алгебр Клиффорда

1. **Разложение по четности**:

$$\mathbb{C}\mathrm{l}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{C}\mathrm{l}_0(\mathbb{R}^n) \oplus \mathbb{C}\mathrm{l}_1(\mathbb{R}^n)$$

2. **Разложение**

$$\mathbb{C}\mathrm{l}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{C}\mathrm{l}_+(\mathbb{R}^n) \oplus \mathbb{C}\mathrm{l}_-(\mathbb{R}^n)$$

на собственные подпространства оператора умножения на элемент

$$\omega = i^{n/2} e_1 e_2 \dots e_n, \qquad \omega^2 = 1.$$

$\mathbb{C}\mathrm{l}_\pm(\mathbb{R}^n) = (1 \pm \omega)\mathbb{C}\mathrm{l}(\mathbb{R}^n)$.

$\Rightarrow \sigma(\omega) = i^{n/2} d\mathrm{Vol} \in \Lambda(V)$, поэтому ω называют комплексной *формой объема.*

Упражнение. Проверьте:

1) $\omega^2 = 1$

2) ω — не зависит от выбора ориентированного базиса.

3. С другой стороны, есть градуировка на спинорах:

$$S = S_+ \oplus S_- = \begin{pmatrix} \text{формы четн.} \\ \text{степени} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \text{формы нечетн.} \\ \text{степени} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{End}\, S = \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix} : \begin{matrix} S_+ \\ \oplus \\ S_- \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} S_+ \\ \oplus \\ S_- \end{matrix}}$$

Упражнение. Какой вид имеют разложения 1. и 2. в терминах 2×2 матриц?

I.4. Структура вещественных алгебр Клиффорда

Компл.теория: 2-периодичность: $\mathbb{C}\mathrm{l}_{n+2} \simeq \mathbb{C}\mathrm{l}_n \otimes \mathbb{C}\mathrm{l}_2$, $\qquad \mathbb{C}\mathrm{l}_2 = \mathrm{Mat}(2, \mathbb{C})$

Веществ.теория: 8-периодичность: $\mathrm{Cl}_{n+8} \simeq \mathrm{Cl}_n \otimes \mathrm{Cl}_8$, $\mathrm{Cl}_8 = \mathrm{Mat}(16, \mathbb{R})$

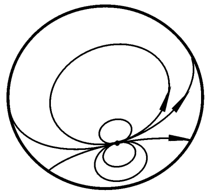
n	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathbb{C}\mathrm{l}_n$	$\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$	$\mathbb{C}[2]$	$\mathbb{C}[2] \oplus \mathbb{C}[2]$	$\mathbb{C}[4]$	$\mathbb{C}[4] \oplus \mathbb{C}[4]$	$\mathbb{C}[8]$	$\mathbb{C}[8] \oplus \mathbb{C}[8]$	$\mathbb{C}[16]$
Cl_n	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$\mathbb{H}[2]$	$\mathbb{C}[4]$	$\mathbb{R}[8]$	$\mathbb{R}[8] \oplus \mathbb{R}[8]$	$\mathbb{R}[16]$

где $\mathbb{F}[k]$ — матрицы $k \times k$ с элементами в $\mathbb{F}$.

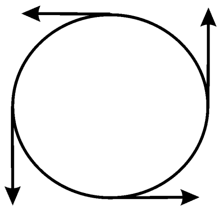
I.5. Приложение. Проблема векторных полей на сфере

Вопрос: $\boxed{\text{каково максимальное число } n \text{ линейно-независимых векторных полей на сфере } \mathbb{S}^N?}$

Примеры.



1. $n(\mathbb{S}^{2k}) = 0$ — ненулевых векторных полей нет (препятствие — эйлерова характеристика$\neq 0$ $\chi(\mathbb{S}^{2k}) = 2$).
2. $n(\mathbb{S}^1) = 1$. Векторное поле: $iz = i(x+iy) \sim$
$$-y\partial/\partial x + x\partial/\partial y$$



3. $n(\mathbb{S}^3) = 3$. Векторные поля
$$ix, jx, kx, \qquad i, j, k \in \mathbb{H}, x \in \mathbb{S}^3.$$

Общий случай.

Лемма. $\boxed{\text{Если } \mathbb{R}^{N+1} \text{ — модуль над } \mathrm{Cl}_n} \Rightarrow \boxed{\text{На } \mathbb{S}^N \text{ существует } n \text{ линейно независимых векторных полей}}$

Док-во. Пусть $e_1 ... e_n$ — ортонорм.базис $\mathbb{R}^n$. Векторные поля E_j имеют вид:

$$E_j(x) = e_j \cdot x, \qquad \text{“}\cdot\text{” — клиффордово произведение}, x \in \mathbb{R}^{N+1}$$

Выбором метрики в $\mathbb{R}^{N+1}$ можно добиться, что умножение на e_j — кососимметрический оператор. Тогда:

a) поля линейно независимы в каждой точке $x \in \mathbb{S}^N$:

$$\begin{matrix} \text{если } c(v)x = 0 \\ v = \lambda^j e_j \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad c^2(v)x = -|v|^2 x = 0 \Rightarrow v = 0;$$

b) поля касательны к сфере $\mathbb{S}^N$:

$$(E_j(x), x) = (e_j \cdot x, x) = -(x, e_j \cdot x) \quad \Rightarrow \quad (E_j(x), x) = 0.$$

$\square$

Замечание. “можно добиться”=

1) усреднение метрики по *группе Клиффорда*:
$$F_n = \{\ \pm e_{i_1} ... e_{i_k} \mid i_1 < i_2 < \ldots i_k\ \} \subset \mathrm{Cl}(\mathbb{R}^n)$$

$\Rightarrow$ унитарность умножения на e_i.

2) теперь $(e_i w, w') = (e_i^2 w, e_i w') = -(w, e_i w')$.

Классификация $\mathrm{Cl}_n \Rightarrow$ минимальные размерности представлений:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
Cl_n	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{H}\oplus\mathbb{H}$	$\mathbb{H}[2]$	$\mathbb{C}[4]$	$\mathbb{R}[8]$	$\mathbb{R}[8]\oplus\mathbb{R}[8]$	$\mathbb{R}[16]$
dim	2	4	4	8	8	8	8	16

$\Rightarrow$

- 1 поле на $\mathbb{S}^1$
- 3 поля на $\mathbb{S}^3$
- 7 полей на $\mathbb{S}^7$
- 8 полей на $\mathbb{S}^{15}$

Теорема. (Радон–Гурвиц)

$$\left\{\begin{array}{c}\text{число векторных полей на сфере}\\ \text{размерности } N, \quad N+1 = 2^{4a+b}(2t+1),\\ \text{где}\ \ 0 \le b \le 3\end{array}\right\} \ge 8a + 2^b - 1.$$

Например, одно векторное поле на $\mathbb{S}^5$.

Док-во. Построим векторные поля, пользуясь клиффорд. модулями.

1. Нечетный множитель можно не учитывать.

2. В силу 8-периодичности, достаточно считать $a = 0$.

3. В случаях, отвечающих разным значениям $b = 0, 1, 2, 3$, число векторных полей (размерность неприводимого представления) находится, пользуясь таблицей вещественных алгебр Клиффорда. $\square$

Замечание. Топологическими методами можно доказать (Адамс), что полученная оценка *точная.*

— · —

пространство спиноров $\Rightarrow$ *оператор Дирака* в пространстве $\mathbb{R}^n$:

$$\not{D} : C^\infty(\mathbb{R}^n, S) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n, S),$$

$$\boxed{\not{D}\psi = \sum c(e_j)\frac{\partial}{\partial x_j}\psi}$$

$\{e_j\}$ — ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$.

Часть II. Спинорная группа

II.1. Симметрии оператора Дирака

Симметрии оператора Лапласа Δ:

инвариантность относительно вращений $A \in \mathbf{SO}(n)$	при замене переменных $y = Ax$ получаем $\Delta = A\Delta A^{-1}$

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\Delta} & C^\infty(\mathbb{R}^n) \\ {\scriptstyle A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle A} \\ C^\infty(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\Delta} & C^\infty(\mathbb{R}^n) \end{array} \quad \text{—коммутативна}$$

$\boxed{\textit{Какие симметрии есть у оператора Дирака?}}$

$$\not{D}\psi = 0, \qquad \psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, S)$$

Если $A = (A_i^j)$ — поворот $\Rightarrow$ инвариантности нет:

$$\not{D} = c^i \frac{\partial}{\partial x^i} \qquad \neq \qquad A\not{D}A^{-1} \equiv c^i A_i^j \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

$\boxed{\text{Поэтому будем преобразовывать еще и спиноры}}$

$$\begin{aligned} y &= Ax, \quad A \in \mathbf{SO}(n) \\ \varphi &= B\psi, \quad B \in \mathrm{Cl}(\mathbb{R}^n) \subset \mathrm{End}(S) \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{оператор Дирака инвариантен} \\ \not{D} = \widetilde{A}\not{D}\widetilde{A}^{-1} \\ \text{относительно пары } \widetilde{A} = (A, B)\end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{c} c^j = B(c^i A_i^j)B^{-1} \\ \forall j = 1, \ldots, n \end{array}} \qquad (*)$$

$\Rightarrow$ оператор $B \cdot B^{-1}$ индуцирует оператор A: $\boxed{BxB^{-1} = Ax}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

II.2. Определение спинорной группы

Опр. *Спинорная группа* (вещественная!)

$$\boxed{\mathbf{Spin}(n) = \left\{ \begin{array}{c} \text{пространство решений } B \in \mathrm{Cl}_0(\mathbb{R}^n) \text{ уравнения } (*), \\ \text{где } A = (A_i^j) \text{ пробегает } \mathbf{SO}(n), \\ \text{которые ортогональны } (BB^* = 1) \end{array} \right\}}$$

Здесь сопряжение: $(e_{i_1}e_{i_2}\ldots e_{i_k})^* = e_{i_k}\ldots e_{i_2}e_{i_1}$

Пример.
$$\begin{array}{ccc}\mathbf{Spin}(2) & \longrightarrow & \mathbf{SO}(2)\\ \| & & \| \\ \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{\times 2} & \mathbb{S}^1\end{array}$$

Действительно, $\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{H}$, $B = \cos\varphi + \sin\varphi k$ и

$$B(ai + bj)B^{-1} = (a\cos 2\varphi - b\sin 2\varphi)i + (a\sin 2\varphi + b\cos 2\varphi)j.$$

Утверждение.

1) $\mathbf{Spin}(n)$ является группой;

2) точная последовательность:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & \mathbf{Spin}(n) & \longrightarrow & \mathbf{SO}(n) & \to 0\\ & \{\pm 1\} & & B & \mapsto & A & \end{array}$$

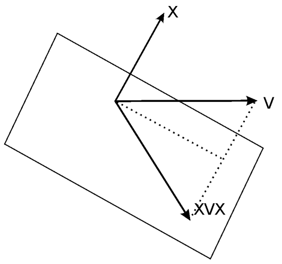
3) $\mathbf{Spin}(n)$ — односвязна при $n \geq 3$, т.е. является универсальной накрывающей $\mathbf{SO}(n)$.

Док-во. 1) групповое свойство проверяется прямым вычислением.
2) точность в члене $\mathbf{Spin}(n)$: Если $A = 1 \Rightarrow Bc^j = c^j B$, т.е. $B \in \{\text{центру } \mathrm{Cl}(\mathbb{R}^n)\} \Rightarrow B = \pm 1$

точность в члене $\mathbf{SO}(n)$: вращение $A \in \mathbf{SO}(n)$ есть композиция четного числа отражений. Для композиции отражений $A = R_{x_1} R_{x_2}$ в плоскостях ортогональных единичным векторам $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ можно взять $B = \pm x_1 x_2$, так как

$\boxed{xvx = v - 2(x,v)x}$

— оператор отражения в плоскости $\mathcal{L}\{x\}^{\perp}$.



3) Известно, что $\boxed{\pi_1(\mathbf{SO}(n)) = \mathbb{Z}_2}$ (т.к. $\mathbb{Z}_2 = \pi_1(\mathbb{RP}^3) = \pi_1(\mathbf{SO}(3))$). Поэтому достаточно доказать нетривиальность накрытия. Нетривиальность следует из связности группы $\mathbf{Spin}(n)$:

точки ± 1 соединяет гомотопия: $(e_1 \cos t + e_2 \sin t)(e_2 \sin t - e_1 \cos t)$.

$\square$

Эквивалентные определения спинорной группы:

1) $\mathbf{Spin}(n) = \left\{ B \in \mathrm{Cl}_0(\mathbb{R}^n) \middle| \begin{array}{c} BxB^{-1} \in \mathbb{R}^n, \text{ для всех } x \in \mathbb{R}^n, \\ BB^* = 1 \end{array} \right\}$, где $\mathrm{Cl}_0(\mathbb{R}^n)$ — четная часть алгебры Клиффорда.

2) $\mathbf{Spin}(n) = \left\{ B = x_1 x_2 \ldots x_{2k} \in \mathrm{Cl}(\mathbb{R}^n) \middle| \begin{array}{c} x_j \in \mathbb{R}^n \text{ — векторы} \\ \text{единичной длины} \end{array} \right\}$

3) $\mathbf{Spin}(n)$ = универсальное накрытие группы $\mathbf{SO}(n)$, $n \geq 3$.

Примеры.

1) $\mathbf{SO}(3) = \mathbb{RP}^3 \Rightarrow \mathbf{Spin}(3) \simeq \mathbb{S}^3$.

Реализация группы $\mathbf{Spin}(3)$ — сфера единичных кватернионов

$$\boxed{\begin{array}{cccc} \mathbb{S}^3 & \longrightarrow & \mathbf{SO}(\mathrm{Im}\,\mathbb{H}) & \\ g & \mapsto & gxg^{-1} & \forall x \in \mathrm{Im}\,\mathbb{H} \end{array}}$$

2) можно продолжить вычисления (см., напр., лекции Постникова):

$$\mathbf{Spin}(4) \simeq \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3,$$

$$\mathbf{Spin}(5) \simeq \mathbf{Sp}(2),$$

$$\mathbf{Spin}(6) \simeq \mathbf{SU}(4).$$

Вложение $\mathbf{Spin}(n) \subset \mathrm{Cl}_0(\mathbb{R}^n)$ покрывает и генераторы $e_i e_j \Rightarrow$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{представления алгебры}\\ \mathrm{Cl}_0(\mathbb{R}^n)\text{ изоморфны}\end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{изоморфны их сужения}\\ \text{на группу }\mathbf{Spin}(n)\end{array}}$$

Применение:

1/2 Ответа на упражнение:

$$c(\mathbb{C}\mathrm{l}_0(\mathbb{R}^n)) = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} : \begin{array}{c} S_+ \\ \oplus \\ S_- \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} S_+ \\ \oplus \\ S_- \end{array}; c(\mathbb{C}\mathrm{l}_1(\mathbb{R}^n)) = \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{pmatrix}$$

где $\mathbb{C}\mathrm{l}(\mathbb{R}^n) \overset{c}{\simeq} \mathrm{End}(S)$ — спинорное представление.

$\Rightarrow$ определены *полуспиновые* представления спинорной группы:

$$\boxed{c_\pm : \mathbf{Spin}(2n) \longrightarrow \mathrm{End}(S_\pm)}$$

они не поднимаются с ортогональной группы, так как $c_\pm(-1) = -Id$.