Лекция 3. Оператор Дирака на римановом многообразии

Оператор Дирака $\not{D}$ есть композиция:

$$C^\infty(\mathbb{R}^n, S) \xrightarrow{\nabla} \mathbb{R}^n \otimes C^\infty(\mathbb{R}^n, S) \xrightarrow{c} C^\infty(\mathbb{R}^n, S).$$

- ∇ — градиент;
- c — клиффордово действие элементов $\mathbb{R}^n \subset \mathrm{Cl}(\mathbb{R}^n)$ на спиноры S.

Как построить оператор Дирака на многообразии?

в пр-ве $\mathbb{R}^n$	*модульная структура*: $c : \mathrm{Cl}(\mathbb{R}^n) \otimes S \longrightarrow S$	градиент ∇
	$\Downarrow$	$\Downarrow$
на много-образии M	модуль в каждой точке: $c : \mathrm{Cl}(T_x^* M) \otimes \mathcal{S}_x \longrightarrow \mathcal{S}_x$	*ковариантная производная*: $C^\infty(M, \mathcal{S}) \xrightarrow{\nabla} C^\infty(M, T^*M \otimes \mathcal{S})$
	естественно: $\mathcal{S}$ — рассл. модулей над рассл. алгебр $\mathrm{Cl}(T^*M)$	
	$\mathcal{S}$ *спинорное расслоение*	

$\Rightarrow$ $\boxed{\not{D} = c \cdot \nabla}$ — как и в плоском пространстве $\mathbb{R}^n$

План лекции:

- построим спинорное расслоение;
- определим ковариантную производную;
- построим оператор Дирака $\not{D}$ и изучим его свойства.

Часть I. Спинорное расслоение

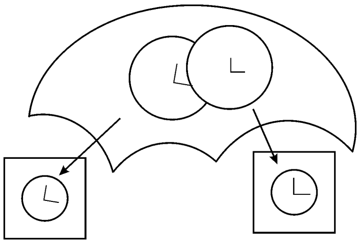
I.1. Локально.

$$\boxed{\begin{matrix}\text{стягиваемая область } U\subset M\\ \text{изоморфизм } TM|_U\simeq U\times\mathbb{R}^n\end{matrix}} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix}\textit{спинорное расслоение}\text{ (трив.)}\\ \mathcal{S}:=U\times S\end{matrix}}$$

I.2. Глобально. Покроем M картами.

$TM|_{U_\alpha}\overset{\varphi_\alpha}{\simeq} U_\alpha\times\mathbb{R}^n \quad TM|_{U_\beta}\overset{\varphi_\beta}{\simeq} U_\beta\times\mathbb{R}^n$

— тривиализации



$$\boxed{\begin{matrix}\varphi_{\alpha\beta}:=\varphi_\alpha\varphi_\beta^{-1}:U_\alpha\cap U_\beta\longrightarrow \mathbf{SO}(n)\\ \text{— \textit{функция склейки}}\end{matrix}}$$

расслоение восстанавливается по функциям склейки:

$$\boxed{TM=\bigsqcup_\alpha (U_\alpha\times\mathbb{R}^n)\Big/\sim}$$

$(x_\alpha,v)\sim(y_\beta,w)\Longleftrightarrow (x_\alpha=y_\beta)\ \ \&\ \ w=\varphi_{\beta\alpha}v$

— отношение эквивалентности при условиях:

1) (симметричность) $\varphi_{\alpha\beta}\varphi_{\beta\alpha}=id$;
2) (транзитивность) $\varphi_{\alpha\gamma}\varphi_{\gamma\beta}\varphi_{\beta\alpha}=id$.

Спинорное расслоение попробуем определить аналогично:

$$\boxed{\boxed{\mathcal{S}:=\bigsqcup_\alpha (U_\alpha\times S)\Big/\sim}} \qquad (*)$$

Проблема! $\boxed{\begin{matrix}\text{на спинорах } S \text{ действует}\\ \text{спинорная группа } \mathbf{Spin}(n)\end{matrix}}$ $\boxed{\begin{matrix}\mathbf{SO}(n)\text{ действует}\\ \text{с точностью до } \pm 1\end{matrix}}$

Опр. $\boxed{\begin{matrix}\textit{спинорная структура}\\ \text{на многообразии } M\end{matrix}}$ $\Leftrightarrow$ поднятие $\widetilde{\varphi}_{\beta\alpha}$ функций склейки в $\mathbf{Spin}(n)$

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{Spin}(n) \arrow[d] \\ U_\alpha\cap U_\beta \arrow[ur, dashed, "\widetilde{\varphi}_{\beta\alpha}"] \arrow[r, "\varphi"] & \mathbf{SO}(n) \end{tikzcd}$$

спинорная структура $\Rightarrow$ спинорное расслоение $\mathcal{S}$ (определено в (*))

Многообразие со спинорной структурой — *спинорное многообразие.*

аналогично (*) определяется $\mathrm{Cl}(TM)$ — *расслоение алгебр Клиффорда* (функции склейки $\in \mathbf{SO}(n)$)

I.3. Модульная структура

Утв. $\boxed{\begin{array}{c}\text{модульная структура}\\ \text{в точке}\\ \mathbb{Cl}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{c} \mathrm{End}(S)\end{array}} \overset{\text{индуцирует}}{\Longrightarrow} \boxed{\begin{array}{c}\text{модульная структура}\\ \text{в слоях}\\ \mathbb{Cl}(T_xM) \xrightarrow{c} \mathrm{End}(\mathcal{S}_x)\end{array}}$

Следствие. Изоморфизм $\mathbb{Cl}(TM) \simeq \mathrm{End}(\mathcal{S})$

Док-во:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{модульная структура}\\ \text{выживает при склейках}\end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{коммутативна диаграмма}\\ \begin{array}{ccc}\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^n)\otimes S & \xrightarrow{c} & S\\ \downarrow{\scriptstyle g\otimes g} & & \downarrow{\scriptstyle g}\\ \mathrm{Cl}(\mathbb{R}^n)\otimes S & \xrightarrow{c} & S\end{array}\end{array}} \quad g \in \mathbf{Spin}(n)$$

т.е. модульная структура $\mathbf{Spin}(n)$-*эквивариантна*:

$$\begin{array}{ccc} g(c(v)s) & \overset{?}{=} & c(g\cdot v)(gs)\\ \| & & \|\\ c(g)c(v)s & & c(gvg^{-1})c(g)s\\ \| & & \|\\ c(gv)s & = & c(gv)s \end{array}$$

вектор $v \in \mathbb{R}^n \subset \mathrm{Cl}(\mathbb{R}^n)$

спинор $s \in S$

$\square$

$\boxed{\textbf{I.4. Когда на } M \textbf{ можно задать спинорную структуру?}}$

Обозначим $\mathbf{SO}(M) := \bigsqcup_\alpha (U_\alpha \times \mathbf{SO}(n)) \Big/ \sim$ — *расслоение реперов.*
— *главное* $\mathbf{SO}(n)$*-расслоение*

Утвержд. $\boxed{\begin{array}{c}\text{спинорная}\\ \text{структура}\\ \text{на } M\end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{двулистное накрытие:}\\ \mathbf{Spin}(M) \longrightarrow \mathbf{SO}(M),\\ \text{главных расслоений,}\\ \text{которое над } x \in M\\ \text{дает накрытие } \mathbf{Spin}(n) \to \mathbf{SO}(n)\end{array}}$

Док-во. $\boxed{\Rightarrow}$ $\mathbf{Spin}(M) := \bigsqcup_\alpha (U_\alpha \times \mathbf{Spin}(n)) \Big/ \sim$

$\boxed{\Leftarrow}$ упражнение. $\square$

Предложение.

$\boxed{\begin{array}{c}\text{2-связное многообразие:}\\ \pi_0(M) = \pi_1(M) = \pi_2(M) = 0\end{array}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{спинорная структура}\\ \text{существует и единственна}\end{array}}$

Док-во.

1. $\boxed{\begin{array}{c}\text{Двулистные накрытия}\\ \text{над } \mathbf{SO}(M)\end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{гомоморфизмы}\\ \pi_1(\mathbf{SO}(M)) \to \mathbb{Z}_2\end{array}}$

2. $\Rightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Двулистные накрытия}\\ \mathbf{Spin}(M) \longrightarrow \mathbf{SO}(M)\\ \text{дающие унив.накрытие}\\ \mathbf{Spin}(n) \to \mathbf{SO}(n)\end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{сквозное отображение}\\ \pi_1(\mathbf{SO}(n)) \to \pi_1(\mathbf{SO}(M)) \to \mathbb{Z}_2\\ \text{— изоморфизм}\end{array}}$ (*)

3. Точная последовательность расслоения $\mathbf{SO}(M) \to M$ даёт

$$0 = \pi_2(M) \to \pi_1(\mathbf{SO}(n)) \longrightarrow \pi_1(\mathbf{SO}(M)) \to \pi_1(M) = 0.$$

поэтому $\pi_1(\mathbf{SO}(n)) \simeq \pi_1(\mathbf{SO}(M)) = \mathbb{Z}_2$. Т.е. (*) существует и единственна.

$\square$

Замечание. Более тонкий анализ показывает:

1) $\boxed{\begin{array}{c}\text{на } M \text{ существует}\\ \text{спинорная структура}\end{array}} \Leftrightarrow \boxed{w_2(M) = 0}$ *класс Штифеля–Уитни.*

2) $\boxed{\{\text{множество спинорных структур}\} \simeq H^1(M, \mathbb{Z}_2)}$

Часть II. Дифференцирование спиноров

II.0. Дифференцирование функций.

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(M) & \xrightarrow{d} & C^\infty(M, T^*M) \\ f & \mapsto & df = \dfrac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \end{array}$$

правило Лейбница: $d(fg) = (df)g + fdg$.

II.1. Дифференцирование векторных полей

Проблема: $\boxed{Y = Y^i \dfrac{\partial}{\partial x^i} \text{ — векторное поле}} \Rightarrow \boxed{\dfrac{\partial Y^i}{\partial x^j} \text{ — \textit{не тензор !}}}$:

при замене координат $x' = x'(x)$ преобразование $Y^{i'} = Y^i \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \Rightarrow$

$$\frac{\partial Y^{i'}}{\partial x^{j'}} = \underbrace{\frac{\partial Y^i}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}}_{\text{тензорный закон}} + \underbrace{Y^i \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}}_{\text{не тензор!}}$$

Выход: добавить члены нулевого порядка:

$$\boxed{\nabla_j Y^i := \partial_j Y^i + \Gamma^i_{jk} Y^k} \qquad \partial_k := \frac{\partial}{\partial x^k},$$

Γ^i_{jk} — *символы Кристоффеля* (неоднозначный выбор!).

Бескоординатное описание. далее $\Gamma(E)$ — пространство сечений расслоения E

Опр. $\boxed{\begin{array}{c} \Gamma(TM) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(T^*M \otimes TM) \\ \text{— \textit{ковариантное дифференци-}} \\ \text{\textit{-рование} (\textit{связность})} \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{c} \text{выполнено правило Лейбница:} \\ \nabla(fX) = df \otimes X + f\nabla X \\ f \text{ — функция, } X \in \Gamma(TM) \end{array}}$

Дифференцирование вдоль векторного поля X: $\nabla_X Y := (\nabla Y)(X)$ — подстановка.

Связь с координатным описанием: положим $\nabla_j := \nabla_{\partial_j}$ $\Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} \nabla = dx^j \nabla_j \\ \nabla_i \partial_j = \Gamma^k_{ij} \partial_k \end{array}}$

Вид связности в локальном репере:

Пусть $(e_1, \dots, e_n) \subset \Gamma(TM)$ — локальный базис векторных полей $\Rightarrow$ раскладываем сечения по базису:

$$(e_1, e_2, \dots, e_n) \begin{pmatrix} u^1 \\ \dots \\ u^n \end{pmatrix} \equiv eu.$$

$\Rightarrow \nabla(eu) = \underbrace{(\nabla e)}_{e\omega} u + edu = e(du + \omega u)$

• $\omega = (\omega^i_j)$ — *матрица связности*: $\nabla e_i = \omega^j_i e_j$. Компоненты — 1-формы.

$$\boxed{\nabla u = (d + \omega) u}$$

В репере $\partial/\partial x_i$:$\omega^k_i = \Gamma^k_{ji} dx^j$

Теперь (M, g) — риманово многообразие.

II.2. Основная теорема дифференциальн.геометрии:

> На римановом многообразии существует и единственна связность (*связность Леви–Чевита*), которая:
> • *согласована с метрикой*: $\nabla_X(Y, Z) = (\nabla_X Y, Z) + (Y, \nabla_X Z)$;
> • *не имеет кручения*: $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$.
> $$\Gamma^l_{ij} = \frac{1}{2} g^{lk} \left(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}\right)$$

• Согласованность с метрикой $\Rightarrow$ кососимметричность формы связности в ортогональном репере:

$$\boxed{0 =} \nabla(e_i, e_j) = (\nabla e_i, e_j) + (e_i, \nabla e_j) \boxed{= \omega^j_i + \omega^i_j}.$$

• Отсутствие кручения $\Leftrightarrow \nabla_i \dfrac{\partial}{\partial x^j} = \nabla_j \dfrac{\partial}{\partial x^i} \Leftrightarrow \boxed{\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}}$

II.3. Дифференцирование спинорных полей

касательное рассл. TM	$\to$	функц.перехода в группе $\mathbf{SO}(n)$	$\to$	форма связности $\omega \in o(n) \otimes \Lambda^1(M)$ $o(n)$ — алгебра Ли $\mathbf{O}(n)$
спинорное расслоение	$\to$	функц.перехода в $\mathbf{Spin}(n)$	$\to$	форма связности $\omega^S \in \mathrm{spin}(n) \otimes \Lambda^1(M)$

$\Rightarrow$ форма связности ω^S получается из ω при отождествлении:

$$\mathrm{spin}(n) \simeq o(n).$$

Каков явный вид спинорной связности?

Лемма. Проекция $\mathbf{Spin}(n) \to \mathbf{SO}(n)$ даёт изоморфизм алгебр Ли:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} o(n) & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{spin}(n) \subset \mathrm{Cl}(\mathbb{R}^n) \\ (a^i_j) & \mapsto & -\frac{1}{4}\sum a^i_j c_i c_j \end{array}}, \qquad c_i \text{ — базис } \mathbb{R}^n \subset \mathrm{Cl}(\mathbb{R}^n)$$

Док-во Леммы. В силу равенства размерностей достаточно проверить формулу на элементах $c_i c_j$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{элемент} \\ c_1c_2 = -1/4 a^i_j c_i c_j\end{array}} \Rightarrow a^1_2 = -a^2_1 = -2 \Rightarrow B = e^{tc_1c_2} = \cos t + c_1 c_2 \sin t$$

$$BxB^{-1} = \begin{pmatrix} \cos 2t & -\sin 2t \\ \sin 2t & \cos 2t \end{pmatrix} x = \exp\left\{ t \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right\} x$$

т.е. получаем искомое: матрице $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ отвечает элемент c_1c_2

$\square$

$\Rightarrow$ **Опр.** *Спинорная связность* Леви–Чевита:

$$\boxed{\overline{\nabla} = d - \frac{1}{4}\sum \omega^i_j c_i c_j \equiv d + \omega^S}$$

Замечание. В ортог.репере неважно, где писать индексы:

$$\boxed{\omega_{kj} =} g_{ik}\omega^i_j = \delta_{ik}\omega^i_j = \boxed{\omega^k_j}.$$

Свойства спинорной связности:

1. Проверьте, что наша формула корректно определяет оператор:
$$\overline{\nabla} : C^\infty(M, \mathcal{S}) \to C^\infty(M, T^*M \otimes \mathcal{S}).$$

2. Выполнено *правило Лейбница*: $a \in \Gamma(TM)$, $u \in \Gamma(\mathcal{S})$
$$\boxed{\overline{\nabla}(au) = (\nabla a)u + a\overline{\nabla}u}$$

Док-во — упражнение. Указание: в первом случае сначала надо проверить корректность a) для замен репера с постоянными коэффициентами b) для замен, которые в одной точке не меняют базиса. $\square$

Часть III. Оператор Дирака на спинорном многообразии.

M — спинорное многообразие, $\mathcal{S}$ — спинорное расслоение.

Опр. *Оператор Дирака* на спинорном многообразии

$$\boxed{\begin{array}{c}\Gamma(\mathcal{S}) \xrightarrow{\overline{\nabla}} \Gamma(T^*M \otimes \mathcal{S}) \overset{g}{\simeq} \Gamma(TM \otimes \mathcal{S}) \xrightarrow{c} \Gamma(\mathcal{S}) \\ \not{D} := c \cdot g \cdot \overline{\nabla}\end{array}}$$

• $\overline{\nabla}$ — спинорная связность;

• $g : T^*M \simeq TM$ — изоморфизм индуцированный метрикой;

• c — клиффордово умножение.

Локальный вид оператора Дирака:

- *в локальной системе координат* $x^1, \dots, x^n$

$$\boxed{\not{D} = \sum c(dx^i)\overline{\nabla}_{\partial_{x^i}}}, \qquad \text{где } c(dx^i) := c(g^{ij}\partial_{x^j})$$

(это видно из того, что $\overline{\nabla} \equiv dx^i \overline{\nabla}_{\partial_{x^i}}$)

- *в локальном репере* $e_1 \dots e_n$ имеет вид:

$$\boxed{\not{D} = \sum c(e_i)\overline{\nabla}_{e_i}}$$

Можно получить, рассматривая переход от координатных векторных полей к ортонорм.базису: $e_i = U_i^j \partial_{x^j}$.

Пример. Оператор Дирака в $\mathbb{R}^4$

$$\not{D} = c(e_i)\frac{\partial}{\partial x_i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\partial_0 + i\partial_1 & \partial_2 + i\partial_3 \\ 0 & 0 & -\partial_2 + i\partial_3 & -\partial_0 - i\partial_1 \\ \partial_0 + i\partial_1 & \partial_2 + i\partial_3 & 0 & 0 \\ -\partial_2 + i\partial_3 & \partial_0 - i\partial_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Теорема (свойства оператора Дирака)

1) самосопряженность

$$\boxed{\not{D}^* = \not{D}}, \qquad \text{т.е. } (\not{D}u, v) = (u, \not{D}v)$$

относительно скалярного произведения

$$(u, v) := \int\limits_M (u(x), v(x))dx,$$

• $(,) : \mathcal{S}_x \times \mathcal{S}_x \to \mathbb{C}$ — скалярное произведение в точке;
• $dx = \sqrt{\det(g_{ij})}dx^1 dx^2 \dots dx^n$ — риманов элемент объёма.

2) (расщепление)

$$\boxed{\not{D}c(\omega) + c(\omega)\not{D} = 0}$$

здесь элемент $\omega = i^{n/2} e_1 e_2 \dots e_n \in \mathbb{C}\mathrm{l}(TM)$ $\omega^2 = 1$, не зависит от выбора *ориентированного* репера

$\Rightarrow$ расслоение спиноров расщепляется $\mathcal{S} = \mathcal{S}_+ \oplus \mathcal{S}_-$, $\mathcal{S}_\pm := (1 \pm c(\omega))\,\mathcal{S}$

оператор Дирака расщепляется:

$$\boxed{\not{D} = \begin{pmatrix} 0 & \not{D}_+^* \\ \not{D}_+ & 0 \end{pmatrix} : \begin{array}{c} C^\infty(M, \mathcal{S}_+) \\ \oplus \\ C^\infty(M, \mathcal{S}_-) \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} C^\infty(M, \mathcal{S}_+) \\ \oplus \\ C^\infty(M, \mathcal{S}_-) \end{array}}$$

3) *формула Вейценбека*:

$$\boxed{\not{D}^2 = \Delta + \frac{R}{4}}$$

где $\Delta = \overline{\nabla}^* \overline{\nabla}$ — лапласиан на спинорах, а R — *скалярная кривизна* многообразия.

Доказательство свойств — прямое вычисление.

п.1. Самосопряженность. Вычислим оператор $\not{D}^*$.

$$\boxed{\not{D}^* = (c \circ g \circ \overline{\nabla})^* = \overline{\nabla}^* \circ g^* \circ c^* : \Gamma(\mathcal{S}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{S})}$$

Сюда подставляем:

- $c^* : \Gamma(\mathcal{S}) \longrightarrow \Gamma(TM \otimes \mathcal{S})$ — сопряжение клиффордова умножения

$$c^*(s) = -\sum c_i \otimes c_i s \qquad \text{(несложно проверить):}$$

$$\boxed{(c(v)s, t) =} \quad - \quad (s, c(v)t) \quad = \quad -(s, v^i c_i t)\boxed{= (v \otimes s, -c_i \otimes c_i t)}.$$

- $g^* = g^{-1}$ — унитарный изоморфизм $\Rightarrow$

$$g^{-1}c^*(s) = -c^i \otimes c_i s = -dx^i \otimes c(\partial_{x^i})s$$

- $\overline{\nabla}^* : \Gamma(T^*M \otimes S) \longrightarrow \Gamma(S)$ — сопряжение к связности

$$\overline{\nabla}^*(dx^j \otimes s_j) = -g^{jk}\left(\overline{\nabla}_j s_k - \Gamma^i_{jk} s_i\right) \quad \text{(получим позже)}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\not{D}^* s =}\overline{\nabla}^*\left(-dx^i \otimes c(\partial_i)s\right) = +g^{jk}\left(\overline{\nabla}_j c(\partial_k)s - \Gamma^i_{jk} c(\partial_i)s\right) =$$

$$= g^{jk}\left(\underline{c(\nabla_j \partial_k)s} + c(\partial_k)\overline{\nabla}_j s - \underline{c(\Gamma^i_{jk}\partial_i)s}\right) = c(dx^j)\overline{\nabla}_j s \boxed{= \not{D} s}.$$

п.2. Расщепление:

соотношение $\not{D} c(\omega) + c(\omega)\not{D} = 0$ легко проверить в локальном базисе (где $\overline{\nabla} = d - 1/4\omega^i_j c_i c_j$) оно вытекает из антикоммутативности:

$$e_k \omega = -\omega e_k.$$

п.3. Возведение в квадрат. Разберемся сначала со связностью.

Квадрат связности — оператор умножения

$$\boxed{\nabla^2 u =}(d+\omega)^2 u = d^2 u + d(\omega u) + \omega du + \omega\wedge\omega u = \boxed{(d\omega + \omega\wedge\omega)u}$$

на матрицу 2-форм.

Глобально:

Опр. *Форма кривизны* связности ∇:

$$\Omega := \nabla^2 \in \Gamma(\Lambda^2(M)\otimes \mathrm{End}(TM));$$

В координатах форму кривизны записывают в виде:

$$\Omega_i^k = \frac{1}{2} R^k_{imj} dx^m \wedge dx^j$$

(кососимметрическая матрица 2-форм)

Коэффициенты R^k_{imj} называются *тензором кривизны Римана* и выражаются через символы Кристоффеля:

$$R^i_{ljk} = \left(\partial_j \Gamma^i_{kl} - \partial_k \Gamma^i_{jl} + \Gamma^m_{kl}\Gamma^i_{jm} - \Gamma^m_{jl}\Gamma^i_{km}\right).$$

В бескоординатном виде тензор Римана определяется формулой:

$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$$

$R(X,Y)$ — оператор на векторных полях.

Кривизна спинорной связности:

$$\boxed{\overline{\Omega} = \overline{\nabla}^2 = d\omega^S + \omega^S\omega^S = -\frac{1}{4}\left[\Omega^i_j\right] c_i c_j} \in \Gamma(\Lambda^2(M)\otimes \mathrm{End}\,\mathcal{S})$$

Это следует из коммутативной диаграммы:

$$\begin{array}{ccc}
o(n)\otimes\Lambda^1(M) & \xrightarrow{d\omega+\omega\wedge\omega} & o(n)\otimes\Lambda^2(M) \\
{\scriptstyle -\frac{1}{4}a_{ij}c_ic_j \simeq}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \simeq -\frac{1}{4}a_{ij}c_ic_j} \\
\mathrm{spin}(n)\otimes\Lambda^1(M) & \xrightarrow{d\omega^S+\omega^S\omega^S} & \mathrm{spin}(n)\otimes\Lambda^2(M)
\end{array}$$

(так как произведение $\omega\wedge\omega$ выражается через коммутатор в алгебре Ли).

Докажем формулу Вейценбека.

Предложение. Справедливы равенства:

$$\boxed{\not{D}^2 = \overline{\nabla}^*\overline{\nabla} + \frac{R}{4} = -\sum_{ij} g^{ij}\left(\overline{\nabla}_i\overline{\nabla}_j - \sum_k \Gamma^k_{ij}\overline{\nabla}_k\right) + \frac{R}{4}}$$

Док-во. 1. Второе равенство (формулу для лапласиана $\overline{\nabla}^*\overline{\nabla}$) получаем, подставляя выражение для $\overline{\nabla}^*$.

2. Проверим первое равенство. Обозначим $c(dx^i) = c^i$

$$\not{D}^2 = \left(c^i\nabla_i\right)\left(c^j\nabla_j\right) = \frac{1}{2}\left(\underbrace{[c^i, c^j]_+\nabla_i\nabla_j}_{A} + \underbrace{2c^i[\nabla_i, c^j]\nabla_j}_{B} + \underbrace{c^ic^j[\nabla_i, \nabla_j]}_{C}\right)$$

где $[a, b]_+ := ab + ba$ — *суперкоммутатор*

$\boxed{A}$ $[c^i, c^j]_+ = g^{ik}g^{jl}[c(\partial_k), c(\partial_l)]_+ =$

$$-2g^{ik}g^{jl}\langle\partial_k, \partial_l\rangle = -2g^{ik}g^{jl}g_{kl} = -2g^{ij}$$

$\boxed{B}$ Правило Лейбница: $[\nabla_i, c(dx^j)] = c(\nabla_i dx^j) = -\Gamma^j_{ik}c(dx^k)$

$$\Rightarrow c^i[\nabla_i, c(dx^j)]\nabla_j = -c^ic^k\Gamma^j_{ik}\nabla_j =$$

$$= -\frac{1}{2}[c^i, c^k]_+\Gamma^j_{ik}\nabla_j = g^{ik}\Gamma^j_{ik}\nabla_j$$

$\boxed{C}$ Член $c^i c^j [\nabla_i, \nabla_j]$ дает скалярную кривизну многообразия.

Симметрии тензора Римана:

- $R^i_{ljk} + R^i_{lkj} = 0$
- $R^i_{ljk} + R^i_{jkl} + R^i_{klj} = 0$ (первое тождество Бьянки);
- $R_{iljk} = R_{lijk}$, где $R_{iljk} = g_{ia} R^a_{ljk}$ — опускание индекса;
- $R_{iljk} = R_{jkil}$.

$\Rightarrow$ 1) *кривизна Риччи* $R_{jk} := R^i_{jik}$; 2) $\boxed{\text{\textit{скалярная кривизна} } R = g^{ab} R_{ab}}$.

$$\frac{1}{2} c(dx^i) c(dx^j) [\nabla_i, \nabla_j] = \sum_{i<j} c(dx^i) c(dx^j) \underbrace{[\nabla_i, \nabla_j]}_{\overline{\Omega}(\partial_i, \partial_j)} =$$

$$\{ \text{ переход к ортог.реперу } \{e_i\} \ \}$$

$$= \sum_{i<j} c(e^i) c(e^j) \overline{\Omega}(e_i, e_j) = c^i c^j \left(-\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{2}\right) R_{klij} c^k c^l$$

$$= \frac{1}{8} [c^i c^j c^l R_{klij}] c^k =$$

$\Rightarrow$ вклад в [...] при попарно различных ijl нулевой

(тождество Бьянки$+ c^i c^j c^l = c^l c^i c^j = c^j c^l c^i$)

$\Rightarrow$ вклад в [...] при $i = j$ нулевой

$$\Rightarrow \text{вклад в [...] при } \begin{cases} i = l \neq j & c^j R_{kiij} = -c^j R_{ikij} \equiv -c^j \mathrm{Ricci}_{kj} \\ j = l \neq i & -c^i R_{kjij} = -c^i R_{jkji} \equiv -c^i \mathrm{Ricci}_{kj} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Окончательно получаем:

$$\boxed{\frac{1}{8} [c^i c^j c^l R_{klij}] c^k} = \frac{1}{8} (-2 c^i \mathrm{Ricci}_{ik}) c^k = \left\{ \begin{array}{c} \text{симметрия} \\ \text{тенз.Риччи} \end{array} \right\} = \frac{1}{4} \mathrm{Ricci}_{ii} \boxed{= \frac{R}{4}}$$

$\square$

Лемма. Сопряженный оператор $\overline{\nabla}^*:\Gamma(T^*M\otimes\mathcal{S})\longrightarrow\Gamma(\mathcal{S})$ имеет вид

$$\boxed{\overline{\nabla}^*(dx^j\otimes s_j)=-g^{jk}\left(\overline{\nabla}_j s_k-\Gamma^i_{jk}s_i\right)}$$

Док-во. 1. Надо доказать, что для $s\in\Gamma(\mathcal{S}),\psi=dx^j\otimes s_j\in\Gamma(T^*M\otimes\mathcal{S})$ имеем:

$$\int\limits_M (s,\overline{\nabla}^*\psi)_x d\mathrm{Vol}=\int\limits_M(\overline{\nabla}s,\psi)_x d\mathrm{Vol}.$$

Перекинуть производные можно по формуле Стокса, если представить разность подынтегральных выражений как полный дифференциал.

Имеем:

$$(s,\overline{\nabla}^*\psi)-(\overline{\nabla}s,\psi)=$$

$$=-\underline{g^{jk}(s,\overline{\nabla}_j s_k)}+g^{jk}\Gamma^i_{jk}(s,s_i)-\underline{g^{jk}(\overline{\nabla}_j s,s_k)}$$

$$=-g^{jk}\frac{\partial}{\partial x^j}(s,s_k)+g^{jk}\Gamma^i_{jk}(s,s_i)$$

Оказывается, что последнее выражение есть:

$$-g^{jk}\frac{\partial}{\partial x^j}(s,s_k)+g^{jk}\Gamma^i_{jk}(s,s_i)=\frac{d(*\omega)}{d\mathrm{Vol}}\tag{1}$$

для 1-формы $\omega=-(s,s_i)dx^i$.

2. Докажем равенство (1). Для формы $\omega=a_i dx^i$ имеем

$$*\omega=\sum_j(-1)^{j+1}\sqrt{g}a_i g^{ij}dx^1\wedge\ldots\widehat{dx^j}\wedge\ldots\wedge dx^n$$

$$\Rightarrow\frac{d(*\omega)}{d\mathrm{Vol}}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_i g^{ij}\sqrt{g}\right)=\frac{\partial a_i}{\partial x_j}g^{ij}+a_i\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(g^{ij}\sqrt{g}\right).$$

Вычислим последнее слагаемое. Определитель дифференцируем по правилу $d/dt(\det A)=\det A\,\mathrm{tr}\,\dot{A}A^{-1}$:

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(g^{ij}\sqrt{g}\right)=\frac{\partial g^{ij}}{\partial x_j}+\frac{g^{ij}}{2g}gg^{ab}\frac{\partial g_{ab}}{\partial x_j}=\{\text{согл.связн.с метрикой}\}$$

$$-\underline{\Gamma^j_{ja}g^{ai}}-\Gamma^i_{ja}g^{aj}+\frac{1}{2}g^{ij}g^{ab}\left(\underline{\Gamma^k_{aj}g_{kb}}+\underline{\Gamma^k_{bj}g_{ak}}\right)=$$

$$=-\Gamma^i_{ja}g^{aj}$$

Таким образом, получаем искомое:

$$\frac{d(*\omega)}{d\mathrm{Vol}}=g^{jk}\frac{\partial}{\partial x^j}a_k-g^{jk}\Gamma^i_{jk}a_i.$$

$\square$