Лекция 4. Индекс и геометрические операторы

Часть I. Теория Фредгольма

$\boxed{\text{Уравнение } Au = f}$ Будем изучать разрешимость с точностью до конечномерного подпространства

I.1 Фредгольмовы операторы

Опр. линейный непрерывный оператор $A : H_1 \longrightarrow H_2$ — *фредгольмов* $\iff$ $\dim\ker A < \infty$, $\dim\operatorname{coker} A < \infty$

$$\operatorname{coker} A = H_2 / \operatorname{Im} A$$

Фредгольмовы операторы в *гильбертовых пространствах* H_1, H_2:

1) $\operatorname{Im} A$ — замкнут, $\operatorname{coker} A \simeq \ker A^*$

2) критерий фредгольмовости:

$\boxed{A \text{ — фредгольмов}}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{A \text{ — \textit{почти-обратим}}}$ т.е. $\exists G : AG - 1$ и $GA - 1$ — компактные операторы

3) фредгольмовы операторы — открытое подмножество в пространстве огранич.операторов

4) A — фредгольмов $\Longrightarrow$ $A + K$ — фредгольмов для компактного оператора K

I.2 Индекс фредгольмова оператора

$$\boxed{\operatorname{ind} A := \dim\ker A - \dim\operatorname{coker} A < \infty}$$

Примеры

1) $\operatorname{ind} A = \dim H_1 - \dim H_2$, если $H_{1,2}$ — конечном.

2) $$\begin{array}{ccc} T : l_2 & \longrightarrow & l_2 \\ (z_1, z_2, \ldots) & \mapsto & (z_2, z_3, \ldots) \end{array} \qquad \operatorname{ind} T = 1$$

Логарифмическое свойство: $\boxed{\operatorname{ind} AB = \operatorname{ind} A + \operatorname{ind} B}$

Теорема (инвариантность индекса)

1. (*гомотопии*) $\operatorname{ind} A_t = Const$, если A_t — непрерывное сем-во. фредг.операторов
2. (*компактн.возмущения*) $\operatorname{ind}(A+K) = \operatorname{ind} A$, K — компактен

Часть II. Эллиптические операторы

II.1 Дифференциальные операторы.

Опр. $\boxed{\begin{array}{c} A : C^\infty(\mathbb{R}^n) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n) \\ \text{— оператор порядка} \le m, \\ m \in \mathbb{Z}_+ \end{array}}$ $\Longleftrightarrow$ $\boxed{A = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x) \left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha}$

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \text{ — мультииндекс, } |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n, \quad \alpha_k \ge 0$$

$$\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha = \left(-i\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(-i\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$$

Когда дифференциальный оператор фредгольмов?

(выбор гильбертовых пространств + условия фредгольмовости)

II.2 Символ оператора.

Полный символ оператора

$\boxed{a(x,\xi) = \sum_\alpha a_\alpha(x)\xi^\alpha}$ $\qquad (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}, \qquad \xi^\alpha \equiv \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_n^{\alpha_n}$

Опр. *главный символ* оператора A

$$\sigma(A)(x,\xi) = \boxed{a_m(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha}$$

Символ оператора Лапласа.

главный символ в точке	$\longleftrightarrow$	замораживание коэффициентов + отброс младших членов

II.3 Свойства главного символа

1) $\boxed{\sigma(AB) = \sigma(A)\sigma(B)}$ — очевидно

2) Если $x = x(y)$ — замена переменных, то

$$\begin{tikzcd} A\left(y, -i\frac{\partial}{\partial y}\right) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto, "\text{главный символ}"'] & A\left(y(x), -i\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right) \arrow[d, mapsto, "\text{главный символ}"] \\ A(y,\eta) \arrow[r, mapsto] & A\left(y(x), \frac{\partial x}{\partial y}\xi\right) \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow \eta = \partial x/\partial y \xi$ — закон преобразования ковекторов.

Следствие $\boxed{\begin{array}{c} A : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M) \\ \text{— диффер. оператор} \end{array}} \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} \sigma(A) \text{ — гладкая функция на} \\ \text{кокасат. расслоении } T^*M \end{array}}$

Опр. $\boxed{\begin{array}{c} \text{Оператор } D \\ \text{— \textit{эллиптический}} \end{array}} \Longleftrightarrow \boxed{\begin{array}{c} \sigma(D) \text{ не обращается в нуль} \\ \text{на } T^*M \setminus \mathbf{0}. \end{array}}$

II.4 Пространства Соболева в $\mathbb{R}^n$

Опр. $H^s(\mathbb{R}^n)$ — *пространство Соболева порядка* s — пополнение $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ по норме

$\boxed{\begin{array}{c} s \in \mathbb{Z}_+ \\ \text{для простоты} \end{array}}$

$$\|u\|_s^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |(1+\triangle)^{s/2}u|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi$$

$\triangle$ — Лапласиан $\qquad \widehat{u}$ — преобразование Фурье

Замечание $\boxed{\text{Для целых } s \geq 0 \text{ условие } u \in H^s(\mathbb{R}^n) \text{ эквивалентно: производные до порядка } s \text{ суммируемы с квадратом: } H^0(\mathbb{R}^n) = L^2(\mathbb{R}^n)}$

Образуют *шкалу*: $H^s(\mathbb{R}^n) \subset H^{s'}(\mathbb{R}^n)$ при $s > s'$

Утверждение: $\bigcap_s H^s(\mathbb{R}^n) \subset C^\infty(\mathbb{R}^n)$

Док-во: $-i\frac{d}{dx} \overset{\text{преобр.Фурье}}{\longleftrightarrow} \xi$

Теорема

$\boxed{A \text{ — дифференциальный оператор порядка } m} \Longrightarrow \boxed{A : H^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{s-m}(\mathbb{R}^n) \text{ — непрерывен } \forall s}$

II.5 Пространства Соболева на компактном многообразии

Опр. $u \in H^s(M) \Leftrightarrow \varphi u \in H^s(\mathbb{R}^n)$, где φ — функция с носителем в произв. карте.

$\boxed{\|u\|_s^2 := \sum \|\varphi_i u\|_s^2}$ где $\sum \varphi_i = 1$ — разбиение единицы,подчин.атласу

Свойства пространств Соболева:

1) $\boxed{\text{разные атласы дают эквивалентные нормы}}$

Пояснение. (очевидно)

2) $\boxed{\begin{gathered}\text{эквивалентность норм:}\\ \|u\|_s^2 \sim \int_M \big((1+\Delta)^{s/2}u\big)^2 d\mathrm{Vol} \equiv \int_M u\big[(1+\Delta)^s u\big] d\mathrm{Vol}\end{gathered}}$

Пояснение. Сравнение норм $\boxed{\geq}$ — очевидно

сравнение $\boxed{\leq}$ — вытекает из интегрирования по частям

$$\int uu'' dx = -\int u'u' dx$$

и того, что в правой части возникают *все* частные производные.

3) $\boxed{\begin{gathered}\text{вложение } H^s(M) \subset H^{s-k}(M), k > 0\\ \text{— компактный оператор.}\end{gathered}}$

Пояснение. На окружности $\mathbb{S}^1$:

$$f = \sum f_j e^{ij\varphi} \in H^s(\mathbb{S}^1) \Leftrightarrow \sum |f_j|^2 (1+|j|)^{2s} < \infty$$

$\Rightarrow$ компактность вложения. На торе $\mathbb{T}^n$ аналогично.

4) $\boxed{(\textit{непрерывность}) \ \mathrm{ord}\, D \leq m \Rightarrow \begin{gathered} D : H^s(M) \to H^{s-m}(M)\\ \text{— непрерывен}\end{gathered}}$

5) $\boxed{(\textit{компактность}) \ \mathrm{ord}\, D \leq m-1 \Rightarrow \begin{gathered} D : H^s(M) \to H^{s-m}(M)\\ \text{— компактен}\end{gathered}}$

Пояснение. п.5 следует из пп. 3 и 4.

Следствие.

1) Оператор Лапласа Δ фредгольмов, и справедлив изоморфизм

$$(1+\Delta)^k : H^s(M) \xrightarrow{\simeq} H^{s-2k}(M).$$

2) фредгольмовость определяется главным символом.

II.6. Теорема (*конечности*) M —компактное замкнутое

> Если дифференциальный оператор D эллиптический, то он фредгольмов в любой паре пространств Соболева: $D : H^s(M) \longrightarrow H^{s-m}(M)$, $m = \operatorname{ord} D$

Докажем утверждение для операторов типа Дирака.

Опр. $\boxed{D : \Gamma(E) \to \Gamma(E) \text{ — } \textit{оператор типа Дирака}}$

$$\Updownarrow$$

1) $D^2 = \Delta_E + \left\{ {\text{оператор} \atop \text{порядка } \leq 1} \right\}$
2) $D = D^*$
3) расслоение E является $\mathbb{Z}_2$-градуированным: $E = E_+ \oplus E_-$ и

$$D = \begin{pmatrix} 0 & D_+^* \\ D_+ & 0 \end{pmatrix} : \begin{matrix} \Gamma(E_+) \\ \oplus \\ \Gamma(E_-) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} \Gamma(E_+) \\ \oplus \\ \Gamma(E_-) \end{matrix}$$

Док-во. Обозначим Δ^{-1} — почти-обратный оператор для Δ.
"$\equiv$" — равенство по модулю операторов младших порядков.
Покажем, что $D\Delta^{-1}$ — почти-обратный к D:
1) $D(D\Delta^{-1}) = D^2\Delta^{-1} \equiv \Delta\Delta^{-1} \equiv 1 : H^{s-1}(M) \to H^{s-1}(M)$;

2) $(D\Delta^{-1})D \equiv (\Delta^{-1}D)D \equiv \ldots \equiv 1$
здесь мы переставили операторы в силу соотношений:

$$\Delta(D\Delta^{-1} - \Delta^{-1}D) = \Delta D\Delta^{-1} - D \equiv D^3\Delta^{-1} - D \equiv D - D = 0$$

$\square$

Следствие. Операторы D_+ и D_+^* фредгольмовы.
Упражнение. Докажите *теорему о регулярности решений*:

> Ядро и коядро оператора D состоят из гладких функций

Указание. Воспользуйтесь почти-обратным оператором.

II.7 Обобщения

Операторы в расслоениях

$E, F \in \mathrm{Vect}(M)$ — векторные расслоения $\qquad \pi : T^*M \setminus \{0\} \to M$

$A \;:\; C^\infty(M,E) \;\longrightarrow\; C^\infty(M,F)$ — дифференциальный оператор порядка m	$\Longrightarrow$	$\sigma(A) \;:\; \pi^*E \;\longrightarrow\; \pi^*F$ — главный символ

Эллиптичность: $\exists \sigma(A)^{-1}$

Фредгольмовы комплексы

$$\mathbf{K} \qquad 0 \to H^0 \xrightarrow{A^0} H^1 \xrightarrow{A^1} H^2 \longrightarrow \ldots \to 0 \quad A^{i+1}A^i = 0$$

Опр. $\boxed{\text{Комплекс } \mathbf{K} \text{ фредгольмов}} \Leftrightarrow \boxed{\text{когомологии } H^i(\mathbf{K}) = \ker A^i / \operatorname{Im} A^{i-1} \text{ — конечномерны}}$

Индекс комплекса

$$\operatorname{ind} \mathbf{K} = \sum (-1)^i H^i(\mathbf{K})$$

- комплекс можно свернуть:

$$\boxed{\operatorname{ind} \mathbf{K} = \operatorname{ind}\big(A + A^* : H^{ev} \longrightarrow H^{odd}\big)} \qquad \begin{aligned} H^{ev} &= H^0 \oplus H^2 \oplus \ldots \\ H^{odd} &= H^1 \oplus H^3 \oplus \ldots \end{aligned}$$

Эллиптические комплексы:

$$0 \to C^\infty(M,E_0) \xrightarrow{D_0} C^\infty(M,E_1) \xrightarrow{D_1} C^\infty(M,E_2) \to \ldots$$

Опр. $\boxed{\text{комплекс эллиптичен}}$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \textit{символьный комплекс } 0 \to \pi^*E_0 \overset{\sigma(D_0)}{\to} \pi^*E_1 \overset{\sigma(D_1)}{\to} \ldots \\ \text{точен на } T^*M \setminus \{0\} \end{array}}$$

Теорема $\boxed{\text{эллиптичность}} \Longrightarrow \boxed{\text{фредгольмовость}}$

$\boxed{\text{Гладкость решений: когомологии } \ker D_i / \operatorname{Im} D_{i-1} \text{ можно считать в } C^\infty}$

Часть III. Связь с геометрическими операторами

Покажем, что оператор $\not{D}$ порождает все операторы типа Дирака.

III.1. Оператор Дирака с коэффициентами (скручивание)

$\not{D} : \Gamma(S) \longrightarrow \Gamma(S)$	E, ∇^E
оператор Дирака	расслоение со связностью

$\Downarrow$

оператор Дирака с коэффициентами в E:

$$\not{D}_E : \Gamma(S \otimes E) \longrightarrow \Gamma(S \otimes E)$$

$$\sigma(\not{D}_E) = \sigma(\not{D}) \otimes 1_E$$

Конструкция:

1) $E = \mathbb{C}^n, \nabla^E = d \Rightarrow \not{D}_{\mathbb{C}^n} = \underbrace{\not{D} \oplus \not{D} \ldots \oplus \not{D}}_{n \text{ штук}}$

2) общий случай:

$$\boxed{\not{D}_E := (c \otimes 1)(g \otimes 1)\overline{\nabla}^E},$$

где $\overline{\nabla}^E = \overline{\nabla} \otimes 1 + 1 \otimes \nabla^E$ — связность на произведении расслоений.

Упражн. Получите формулу Вейценбека для $(\not{D}_E)^2$.

Утвержд.

$\boxed{D \text{ — оператор типа Дирака}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} D \equiv \not{D}_W \text{ для } \mathbb{Z}_2\text{-градуиров.} \\ \text{расслоения } W \in \mathrm{Vect}(M) \end{array}}$

Док-во.

1. $D^2 \equiv \Delta \Rightarrow \sigma^2(D)(\xi) = |\xi|^2 \Rightarrow$

$\boxed{i\sigma(D) : T^*M \longrightarrow \mathrm{End}(E)}$ продолжается до гомоморфизма $\boxed{c : \mathbb{Cl}(T^*M) \longrightarrow \mathrm{End}(E)}$

2. Положим $W = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Cl}(T^*M)}(\mathcal{S}, E)$ — $\mathbb{Cl}(T^*M)$ — линейные гомоморфизмы

$\Rightarrow \boxed{\mathcal{S} \otimes W \simeq E}$, $(s, w) \mapsto w(s)$. — изоморфизм модулей

($W \in \mathrm{Vect}(M)$, так как $E_x \simeq \underbrace{S \oplus S \oplus \ldots \oplus S}_{N \text{ штук}} \Rightarrow \mathrm{Hom}_{\ldots} \ldots \simeq \mathbb{C}^N$).

3. $W = W_+ \oplus W_-$ — гомоморфизмы сохр.(обращ.) градуировку; $\square$

$\boxed{\textbf{Меняя расслоение } W\textbf{, получаем все геометрические операторы}}$

Пример 1 (комплекс де Рама и оператор Эйлера)

$$(\Lambda^\bullet, d) \quad \boxed{0 \to C^\infty(M) \xrightarrow{d} \Lambda^1(M) \xrightarrow{d} \Lambda^2(M) \to \ldots \Lambda^n(M) \to 0}$$

символ в точке $\quad 0 \to \mathbb{C} \xrightarrow{\xi\wedge} \Lambda^1(\mathbb{C}^n) \xrightarrow{\xi\wedge} \Lambda^2(\mathbb{C}^n) \to \ldots \qquad \xi \in \mathbb{R}^n$

— при $\xi \neq 0$ точный комплекс $\Rightarrow$ $\boxed{\text{фредгольмовость и } \dim H^i_{dR}(M) < \infty}$

$$\operatorname{ind}(\Lambda^\bullet, d) = \sum (-1)^i \dim H^i(M, \mathbb{C}) = \chi(M) = \boxed{\text{сворачивание}}$$
$$= \operatorname{ind}\big(d + d^* : \Lambda^{ev}(M) \longrightarrow \Lambda^{odd}(M)\big)$$

$d + d^* : \Lambda^{ev}(M) \longrightarrow \Lambda^{odd}(M)$ — *оператор Эйлера*

$$\boxed{\textit{скалярное произведение:} \langle \omega_1, \omega_2 \rangle = \int_M \omega_1 \wedge *\omega_2} \quad \omega_{1,2} \in \Lambda^k(M)$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \textit{звездочка Ходжа}, \ * : \Lambda^k(M) \longrightarrow \Lambda^{n-k}(M) \\ *(e_1 \wedge \ldots \wedge e_k) = e_{k+1} \wedge \ldots \wedge e_n \\ \text{для ортонорм. ориентир. базиса } (n = 2l) \end{array}} *^2 |_{\Lambda^k} = (-1)^k$$

$\ker(d + d^*) = \ker d \cap \ker d^*$ — *пространство гармонических форм.*

Док-во. $(d + d^*)u = 0 \Rightarrow (d + d^*)^2 u = 0 \Rightarrow 0 = (u, (dd^* + d^*d)u) = (d^*u, d^*u) + (du, du) \Rightarrow du = 0, d^*u = 0$ $\square$

$d{+}d^*$ — оператор типа Дирака: $(d{+}d^*)^2 = \Delta$. Вычислим скручивающее расслоение.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{изоморфизм в точке}\\ \mathbb{C}\mathrm{l}(\mathbb{R}^n) \overset{\sigma}{\simeq} \Lambda(\mathbb{R}^n)\\ e_{i_1}e_{i_2}\ldots e_{i_k} \mapsto e_{i_1}\wedge e_{i_2}\wedge\ldots\wedge e_{i_k}\end{array}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{глобальный изоморфизм}\\ \mathbb{C}\mathrm{l}(T^*M) \overset{\sigma}{\simeq} \Lambda(M)\end{array}}$$

$\Rightarrow$ коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} \Lambda(M) \arrow[r, "d+d^*"] \arrow[d, "\sigma"'] & \Lambda(M) \arrow[d, "\sigma"] \\ \mathbb{C}\mathrm{l}(T^*M) \arrow[r, "\not{D}_{\mathcal{S}^*}"] & \mathbb{C}\mathrm{l}(T^*M) \end{tikzcd} \quad , \quad -i\sigma(d+d^*) = \xi\wedge - \xi\lrcorner$$

здесь мы использовали то, что $\mathbb{C}\mathrm{l}(T^*M) \simeq \mathrm{End}(\mathcal{S}) = \mathcal{S}\otimes\mathcal{S}^*$

Сравнивая градуировки $\Lambda^{ev}(M)\oplus\Lambda^{odd}(M) \simeq \mathbb{C}\mathrm{l}_0(T^*M)\oplus\mathbb{C}\mathrm{l}_1(T^*M)$ и тот факт, что

$$\sigma(\mathbb{C}\mathrm{l}_0(T^*M)) = \begin{pmatrix} * & 0\\ 0 & * \end{pmatrix} : \begin{array}{c}\mathcal{S}_+\\ \oplus\\ \mathcal{S}_-\end{array} \longrightarrow \begin{array}{c}\mathcal{S}_+\\ \oplus\\ \mathcal{S}_-\end{array} ; \sigma(\mathbb{C}\mathrm{l}_1(T^*M)) = \begin{pmatrix} 0 & *\\ * & 0 \end{pmatrix}$$

Поэтому оператор Эйлера записывается в виде:

$$\begin{array}{c}\mathcal{S}_+\otimes\mathcal{S}_+^*\\ \oplus\\ \mathcal{S}_-\otimes\mathcal{S}_-^*\end{array} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \not{D}_{\mathcal{S}_+^*} & 0\\ 0 & \not{D}^*_{\mathcal{S}_-^*} \end{pmatrix}} \begin{array}{c}\mathcal{S}_-\otimes\mathcal{S}_+^*\\ \oplus\\ \mathcal{S}_+\otimes\mathcal{S}_-^*\end{array}$$

т.е. $\boxed{\text{оператор Эйлера имеет вид } \not{D}_W \text{ для } \mathbb{Z}_2\text{-расслоения } W = \mathcal{S}_+^*\oplus\mathcal{S}_-^*.}$

Пример 2 (оператор сигнатуры) M^{2l} — ориентированное риманово

$$\boxed{d^* = -*d* : \Lambda^{k+1}(M) \longrightarrow \Lambda^k(M)} \text{ сопряж. оператор}$$

<u>Док-во:</u> интегрирование по формуле Стокса (по модулю полных дифференциалов).

$$\boxed{\begin{array}{c}\Lambda(M) = \Lambda^+(M) \oplus \Lambda^-(M) \text{ — собственные подпр-ва} \\ \text{инволюции } \alpha|_{\Lambda^k(M)} = i^{k(k+1)+l}*\end{array}}$$

$\Downarrow$ $d + d^*$ антикоммутирует с α

$$\boxed{d + d^* : \Lambda^+(M) \longrightarrow \Lambda^-(M) \quad \textbf{оператор сигнатуры}}$$

$$\operatorname{ind}(d + d^* \colon \Lambda^+(M) \longrightarrow \Lambda^-(M)) = \operatorname{sign} M \quad \left| \quad \begin{array}{c} \text{сигнатура} \\ \textit{формы пересечения} \\ H^l(M) \times H^l(M) \longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega_1, \omega_2 \mapsto \int_M \omega_1 \wedge \omega_2 \end{array} \right.$$

<u>Док-во:</u> 1. Вклад от $H^k(M) \oplus H^{2l-k}, k \neq l$ в индекс дает нулевую сигнатуру.

2. $H^l(M) \cap \Lambda^+$ дает положительные квадраты, $H^l(M) \cap \Lambda^-$ — отрицательные.

$\square$

Вычисление скручивающего расслоения:

Сравнивая градуировки $\Lambda^+(M) \oplus \Lambda^-(M) \simeq \mathbb{C}\mathrm{l}_+(T^*M) \oplus \mathbb{C}\mathrm{l}_-(T^*M)$ и тот факт, что

$$\sigma(\mathbb{C}\mathrm{l}_+(T^*M)) = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{array}{c} \mathcal{S}_+ \\ \oplus \\ \mathcal{S}_- \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \mathcal{S}_+ \\ \oplus \\ \mathcal{S}_- \end{array} ; \sigma(\mathbb{C}\mathrm{l}_1(T^*M)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \mathbb{C}\mathrm{l}_\pm \simeq \mathcal{S}_\pm \otimes \mathcal{S}^*$

получаем, что оператор сигнатуры равен оператору $\not{\mathbb{D}}_{\mathcal{S}^*}$

Пример 3 (комплекс Дольбо и оператор Тодда)

M — комплексное многообразие $z^1, z^2, \dots, z^n$

Комплекс Дольбо

$$(\Lambda^{0,\bullet}, \overline{\partial}) \quad \boxed{0 \to C^\infty(M) \xrightarrow{\overline{\partial}} \Lambda^{0,1}(M) \xrightarrow{\overline{\partial}} \Lambda^{0,2}(M) \to \dots \Lambda^{0,n}(M) \to 0}$$

- $\Lambda^{0,k}(M) \subset \Lambda^k(M) \otimes \mathbb{C}$ — формы, содержащие только $d\overline{z}^j$
- $\overline{\partial}\left(f d\overline{z}^{j_1} \wedge \dots \wedge d\overline{z}^{j_k}\right) = \sum \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}^j} d\overline{z}^j \wedge d\overline{z}^{j_1} \wedge \dots \wedge d\overline{z}^{j_k}$

$$\boxed{\operatorname{ind}(\Lambda^{0,\bullet}, \overline{\partial}) = \sum_q (-1)^q h^{0,q}(M)} \qquad \textit{арифметический род}$$

$h^{0,q}(M) = \ker \overline{\partial}|_{\Lambda^{0,q}} / \operatorname{Im} \overline{\partial}|_{\Lambda^{0,q-1}}$ — *когомологии Дольбо*

$$= \operatorname{ind}(\overline{\partial} + \overline{\partial}^* : \Lambda^{0,ev}(M) \longrightarrow \Lambda^{0,odd}(M))$$

— *оператор Тодда*

в комплексном анализе: арифметический род — эйлерова характеристика с коэффициентами в пучке ростков голоморфных функций

Когда на (почти)комплексном многообразии существует спинорная структура?

Опр. $\boxed{\mathbf{Spin}_c(n) = \mathbf{Spin}(n) \times \mathbb{U}(1)/(-1,-1)}$ — *комплексная спинорная группа*

спинорное представление: $\mathbf{Spin}_c(2n) \longrightarrow \mathrm{End}(S)$.

Коммутативная диаграмма:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{U}(m) \arrow[r] \arrow[dr, "i\times\det"'] & \mathbf{Spin}(2m) \times \mathbb{U}(1)/(-1,-1) \arrow[d, "\mathbb{Z}_2"', "(\rho,\lambda^2)"] \\ & \mathbf{SO}(2m) \times \mathbb{U}(1) \end{tikzcd}$$

здесь ρ — универсальное накрытие, λ^2 — возведение в квадрат; верхняя стрелка — действие унитарных матриц на комплексные формы $S \simeq \Lambda^{0,*}$.

Функции склейки $\det U_{\alpha\beta}$ определяют *антиканоническое расслоение* $K^* := \Lambda^{0,n}(M)$

Утвержд. $\boxed{\text{spin-структура на } M} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{извлечение}\\ \text{квадратного корня}\\ K^* = L_1 \otimes L_1\end{array}}$

Замечание. В топологических терминах последнее уравнение эквивалентно: $c_1(M) = 2c_1(L_1)$ — делимость первого класса Черна

<u>Док-во.</u>

$\det U_{\alpha\beta} = f^2_{\alpha\beta} \Leftrightarrow$ поднятие функций склейки в спинорную группу. $\square$

Можно доказать, что если комплексное многообразие спинорно, то

$$\sqrt{2}(\overline{\partial} + \overline{\partial}^*) \equiv \not{D}_{L_1}$$

Еще надо пару слов сказать о том, когда мы получаем точное равенство операторов:

- для оператора Эйлера совпадение операторов всегда
- для оператора сигнатуры совпадение операторов всегда
- оператор Тодда совпадает с оператором Дирака $\Leftrightarrow$ метрика *кэлерова*.