# Лекция 5. Метод уравнения теплопроводности в теории индекса

| | |
|---|---|
| Основной результат: $\boxed{\operatorname{ind} D = \int_M \omega_D}$ — локальное выражения для индекса | • $D$ — оператор типа Дирака, • форма $\omega_D$ определяется коэффициентами оператора и их производными поточечно! |

Важность локальной формулы:

• мультипликативность индекса для накрытий:
если $\pi : X \to Y$ — накрытие $\Rightarrow$ $\boxed{\operatorname{ind} \pi^* D_Y = n \operatorname{ind} D_Y}$,
здесь $n$ — число листов; $D_Y$ — эллипт.оператор на базе.

• в следующей лекции: для оператора Дирака явно вычислим $\omega_D$.

# Часть I. Индекс и суперслед

## I.1. Формула Зингера–Маккина.

Сделаем индекс вещественным числом:

$$\operatorname{ind} D_+ = \operatorname{Tr} 1|_{\ker D_+} - \operatorname{Tr} 1|_{\ker D_+^*}$$

Напомним, $\operatorname{Tr} A \sum (Ae_i, e_i)$, где $\{e_i\}$ — произв. ортонорм. базис), в базисе из собственных функций: $\operatorname{Tr} A = \sum_{\mathrm{specA}} \lambda_j$

У нас $D = \begin{pmatrix} 0 & D_+^* \\ D_+ & 0 \end{pmatrix}$ — оператор типа Дирака.

**Опр.** $V = V_0 \oplus V_1$ — $\mathbb{Z}_2$-*градуированное пространство* (*суперпространство*);

$$\operatorname{Tr}_s \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := \operatorname{Tr} a - \operatorname{Tr} d \text{ — \textit{суперслед} линейного оператора}$$

в этих обозначениях: $\boxed{\operatorname{ind} D_+ = \operatorname{Tr}_s 1|_{\ker D}}$

**Утв.** (суперсимметрия) спектр (с кратностями) оператора $D$ симметричен относительно нуля.

Док-во: обозначим $\gamma = 1 \oplus -1 : \mathcal{S}^+ \oplus \mathcal{S}^- \longrightarrow \mathcal{S}^+ \oplus \mathcal{S}^-$

$\boxed{D\gamma + \gamma D = 0}$ Поэтому если $Du = \lambda u \Rightarrow D(\gamma u) = -\lambda(\gamma u)$. □

Поэтому $\operatorname{ind} D_+ = \operatorname{Tr}_s f(D^2)$ для функции $f$, если $f(0) = 1$.

$$\boxed{\text{\textit{формула Зингера — Маккина}} \quad \operatorname{ind} D_+ = \operatorname{Tr}_s e^{-tD^2}} \ \forall t > 0.$$

Подробно: $\operatorname{Tr}_s e^{-tD^2} = \operatorname{Tr} e^{-tD_+^* D_+} - \operatorname{Tr} e^{-tD_+ D_+^*}$

**Упражнение.** Не прибегая к разложению по собственным векторам, проверьте:

$$\frac{d}{dt} \operatorname{Tr}_s e^{-tD^2} = 0$$

В этой лекции займемся экспонентой и следом. В следующий раз “супер” явления.

**I.2 Дискретность спектра.**

**Предложение.**

1) Оператор $D$ имеет дискретный спектр конечной кратности.

2) Собственные функции $u_\lambda$ — гладкие и $\|u_\lambda\|_{H^s} \le C\lambda^s$.

3) Если собственные значения упорядочить по возрастанию модуля, то мы получим: $|\lambda_k| \ge Ck^\gamma$, для некоторого $\gamma > 0$.

**Пример.** $D = -id/dt$ на $\mathbb{S}^1 \Rightarrow \mathrm{Spec}D = \mathbb{Z}$, $u_\lambda = e^{i\lambda\varphi}$.

Док-во. 1. Пусть $E_\lambda$ — собственное подпространство. Обозначим $d(\Lambda) := \dim \underbrace{\left(\oplus_{|\lambda|\le\Lambda} E_\lambda\right)}_{E(\Lambda)}$ — число собственных значений в интервале $[-\Lambda, \Lambda]$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{почти-обратный оператор}\\ RD = 1 + K, \text{ порядок } K \le -1\\ \text{(соболевский порядок)}\end{array}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{априорная оценка } \forall k \ge 1\\ \|u\|_k \le C(\|u\|_0 + \|D^k u\|_0)\end{array}}$$

Если $u \in E(\Lambda) \Rightarrow u = \sum a_\lambda u_\lambda \Rightarrow \|D^k u\|_0 \le \Lambda^k \|u\|_0 \Rightarrow$

$$\boxed{\|u\|_k \le C(1 + \Lambda^k)\|u\|_0}$$

теорема вложения Соболева
$H^k(M^n) \subset C^1(M)$ при $k > n/2 + 1$ $\Downarrow \sup|\nabla u| \le C\|u\|_k$

$$\boxed{\sup|\nabla u| \le C(1 + \Lambda^k)\|u\|_0, \quad \forall u \in E(\Lambda)}$$

2. С другой стороны, раскинем в $M$ $\varepsilon$-сеть. В ней порядка $\varepsilon^{-n}$ элементов.

Если $\varepsilon^{-n} < d(\Lambda) \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{существует функция } v \in E(\Lambda):\\ \|v\|_0 = 1, v = 0 \text{ на всех точках } \varepsilon\text{-сети}\end{array}}$

$\Rightarrow \sup|v| \le \varepsilon C'(1 + \Lambda^k)$,

что при $\varepsilon C'(1 + \Lambda^k)\sqrt{Vol(M)} < 1$ противоречит условию $\|v\|_0 = 1$.

Поэтому получаем

$$d(\Lambda) \le C(\varepsilon')^{-n} = C\left(\Lambda^{-k}\right)^{-n} = C\Lambda^{(n/2+1)n}.$$

Это дает дискретность спектра и оценку роста собственных значений.

□

**Почему выбираем экспоненту?**

# Часть II. Уравнение теплопроводности.

## II.1 Уравнение теплопроводности в $\mathbb{R}^n$:

$$(*) \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} u = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} u \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{u_t = e^{-t\Delta} u_0} = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4t}\right) u_0(y) dy$$

**Утверждение.** Решение системы (*) единственно.

Док-во. Единственность следует из убывания энергии:

$$\frac{d}{dt} \|u_t\|^2_{L^2} = -(u, \Delta u) \leq 0.$$

□

Далее рассматриваются операторы типа Лапласа.

**Опр.** $\boxed{D \text{ — } \textit{обобщенный Лапласиан}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} \sigma(\Delta) = |\xi|^2 \\ \Delta^* = \Delta \end{matrix}}$

Пример обобщенного Лапласиана — оператор $\not{D}^2$.

## II.2. Ядро теплопроводности.

**Утверждение.** 1) $e^{-t\Delta}$ — интегральный оператор

$$(e^{-t\Delta} u)(x) = \int\limits_M k_t(x, y) u(y) dy$$

с гладким *ядром Шварца* $k_t(x, y) \in C^\infty(\mathbb{R}_+ \times M^2, p_1^* \mathcal{S} \otimes p_2^* \mathcal{S}^*)$ ($p_{1,2}$ — проекции на сомножители)

2) $\operatorname{Tr} e^{-t\Delta} = \int\limits_M \operatorname{tr} k_t(x, x) dx$

Док-во.

1) Разложение в ряд по собственным функциям ($\Delta u_j = \lambda_j u_j$)

$$e^{-t\Delta} = \sum_j e^{-t\lambda_j} u_j u_j^* \Rightarrow \boxed{(e^{-t\Delta} v)(x) = \sum_j e^{-t\lambda_j} u_j(x) \int\limits_M u_j^*(y) v(y) dy}$$

— гладкость по $(t, x, y)$ получается из эллиптических оценок.

2)
$$\operatorname{Tr} e^{-t\Delta} = \sum_j e^{-t\lambda_j} \cdot 1 = \sum e^{-t\lambda_j} \int\limits_M \operatorname{tr} u_j(x) u_j^*(x) dx = \int\limits_M \operatorname{tr} k_t(x, x) dx$$

Отметим, что 2) верно для любого интегрального оператора. □

**Поведение в граничных точках:**

$t \to \infty \quad \Rightarrow \quad e^{-t\Delta} \to P_{\ker\Delta}$ — проектор на ядро

$t \to 0 \quad \Rightarrow \quad e^{-t\Delta}“ \to ”1$ и $k_t(x,y) \to \delta(x-y)$

**Опр.** $\boxed{\begin{array}{c}\text{Функция } k_t(x) \text{ —}\\ \textit{фундаментальное решение}\\ \text{ур-я тепл.в точке } 0 \in M\end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{она — решение задачи Коши}\\ \begin{cases}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta_x\right) k_t = 0, t > 0\\ k_t \xrightarrow{t\to 0} \delta(x)\end{cases}\end{array}}$

предел в смысле обобщ.функций: $(k_t(x,\cdot), v) \to v(x)$ при $t \to 0$.

**Предложение.** Фундаментальное решение $k_t(x)$ в точке единственно.

Док-во. Пусть $w_t$ — фундаментальное решение $\Rightarrow (s, w_t) = (e^{-(t-\varepsilon)\Delta} s, w_\varepsilon) \Rightarrow$

при $\varepsilon \to 0$ $\boxed{\begin{array}{c}e^{-(t-\varepsilon)}\Delta \to e^{-t\Delta} \text{ в } C^\infty \text{ топологии}\\ (\cdot, w_\varepsilon) \text{ — огранич.в } C^\infty\end{array}} \Rightarrow$

$\boxed{(s, w_t) = (e^{-(t-\varepsilon)\Delta} s, w_\varepsilon) \to (e^{-t\Delta} s)(y)} \Rightarrow (s, w_t) = (e^{-t\Delta}) s(y)$ — однозначно определяет $w_t$. □

## II.3. Асимптотическое разложение.

**Теорема.** (Минакшисандарам–Плейель 1969) При $t \to 0$ имеет место асимптотическое разложение

$$\boxed{\boxed{k_t(x) \sim (4\pi t)^{-n/2} \exp\left(-\frac{d^2(x,0)}{4t}\right) \sum_{j\ge 0} a_j(x) t^j}}$$

где $d(x,0)$ — расстояние, коэффициенты $a_j(0)$ определяются коэффициентами оператора и их производными в точке $x = 0$. $a_0(0) = 1$.

**Замечание.** Символ “$\sim$” понимаем так: для любого $q$ имеем

$$|k_t(x) - k_t^N(x)| \le C_q t^q,$$

где $k_t^N(x)$ — сумма $N = N(q)$ членов разложения.

Более тонкий анализ для оператора записанного в виде

$$\Delta = -(g^{ij}\nabla_i\nabla_j + E) : C^\infty(M, \mathcal{E}) \to C^\infty(M, \mathcal{E})$$

($\nabla$ — связность; $E$ — эндоморфизм) дает выражение

$$\boxed{\operatorname{tr} a_1 = \frac{1}{6}\operatorname{tr}(6E + R)}$$

Дальше сложно, например, $a_5$ вычислен в 1998 г.

## II.4. Приложения.

**Следствие**. Полагая $x = 0$, получаем

$$\operatorname{Tr} e^{-t\Delta} \sim (4\pi t)^{-n/2} \sum_j \left( \int_M \operatorname{tr} a_j dx \right) t^j$$

— асимптотика следа уравнения теплопроводности.

Главный член: $\operatorname{Tr} e^{-t\Delta} \sim \mathrm{rk} E \dfrac{Vol(M)}{(4\pi t)^{n/2}}$

**Следствие** 1. В нечетной размерности индекс равен нулю.

2. В четной —

$$\operatorname{ind} D_+ = (4\pi)^{-n/2} \int_M \operatorname{tr}\Big[ a_{n/2}(D_+^* D_+) - a_{n/2}(D_+ D_+^*) \Big] dx$$

### Отступление. Спектральная геометрия.

$\boxed{\textbf{Можно ли услышать форму барабана?}\ \text{(М.Кац)}}$

или: какую геометрическую информацию о пространстве можно восстановить по спектру оператора Лапласа?

Информация о ядре теплопроводности дает:

1) можно услышать объем (Г. Вейль)

2) $-||-$ полную скалярную кривизну (Зингер–Маккин)

3) топологию двумерной ориентированой поверхности (как индекс оператора Эйлера)

Некоторые другие результаты:

4) спектр скалярного Лапласиана отличает стандартную метрику на $\mathbb{S}^n$, $n \leq 6$

5) существуют изоспектральные но неизометричные торы $\mathbb{T}^{16}$ (Милнор, 1964).

**Приложение.** Дзета-функция эллиптического оператора $\Delta > 0$:

$$\zeta(\Delta)(s) := \sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}\Delta, \lambda \neq 0} \lambda^{-s}, \qquad \mathrm{Re} z >> 1.$$

(мотивировка: $\Delta = -d^2/d\varphi^2$ — $\zeta$-функция Римана)

$\lambda_n > Cn^\gamma \Rightarrow \boxed{\zeta(\Delta)(s) \text{ — аналитическая функция в полуплоскости}}$

Связь с уравнением теплопроводности:

$$\lambda^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t\lambda} dt \Rightarrow \boxed{\zeta(\Delta)(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} \,\mathrm{Tr}(e^{-t\Delta}) dt}$$

Подставим асимптотическое разложение теплопроводности в нуле:

$$\mathrm{Tr}\, e^{-t\Delta} \sim t^{-n/2} \sum c_j t^j$$

$\Rightarrow$ *мероморфное продолжение $\zeta$-функции*:

$$\zeta(\Delta)(s) \sim \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 \sum c_j t^{s-1+j-n/2} dt \sim \frac{1}{\Gamma(s)} \left( \sum \frac{c_j}{s+j-n/2} \right)$$

— мероморфная функция в $\mathbb{C}$.

Здесь "$\sim$" это равенство по модулю голоморфных функций.

$\boxed{\text{коэффициенты разложения теплопроводности}} \Leftrightarrow \boxed{\text{полюса и вычеты } \zeta\text{-функции}}$

$\boxed{\zeta(\Delta)(0) = \int_M a_{n/2}(\Delta)}$ — $\zeta$-инвариант эллиптического оператора.

# Часть III. Получение асимптотического разложения.

План:

1. Сначала построим асимптотическое решение

2. Затем докажем, что асимптотическое решение приближает настоящее решение.

Вычисления удобно проводить в *нормальных координатах*

**III.1. Нормальные координаты.**

*Экспоненциальное отображение:*

$$\begin{array}{ccc} T_xM & \xrightarrow{exp} & M \\ \dot\gamma(0) & \mapsto & \gamma(1) \end{array}$$

где $\gamma(t) : \mathbb{R} \to M$ — геодезическая, выходящая из точки $x \in M$ в направлении $\dot\gamma(0)$.

$exp$ — диффеоморфизм в окрестности нуля.

Напомним уравнение геодезических

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0 \text{ или в координатах } \ddot{x}^i + \Gamma^i_{jk}\dot{x}^j\dot{x}^k = 0$$

**Опр.** *Нормальные координаты* в окрестности точки $x$, это линейные координаты $x^1, x^2, \ldots$ в $T_xM$ по отношению к реперу $\{e_i\} \subset T_xM$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{репер } e_1, e_2 \ldots \\ \text{в точке } x\end{array}} \overset{\text{паралл.перенос}}{\Longrightarrow} \boxed{\begin{array}{c}\text{репер в окрестности} \\ \text{точки } x\end{array}}$$

Преимущества нормальных координат:

1) геодезические, проходящие через $x$, изображаются прямыми.

2) $d(x, 0)^2 = \sum(x^i)^2$;

3) $g_{ij}x^i = x^j$ — (геодезические ортогональны единичным сферам)

4) $g_{ij} = \delta_{ij} + O(x^2)$

5) $\Gamma^i_{jk} = -1/2R^i_{jkl}(0)x^l + O(x^2)$

—||—

**III.2. Построение асимптотического решения.** Задача локальная, поэтому будем работать в области в $\mathbb{R}^n$ (с метрикой $g$).

<u>Нулевое приближение.</u> Положим:

$$Q = Q(x, t) := \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-d^2(x,0)/4t}$$

**Лемма.** $\boxed{\left(\partial_t + \Delta_x\right) Q = \left(\frac{a_0}{t} + a_1\right) Q, \quad Q \to \delta(x) \text{ при } t \to 0}$

где $a_0, a_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $a_0(0) = 0$

Док-во. Будем писать $f_1 \approx f_2$, если $f_1 - f_2$ — функция такого же вида как в правой части формулы из доказываемой леммы. Тогда

$$
\begin{aligned}
\Delta Q \approx -g^{ij}\frac{\partial^2 Q}{\partial x^i \partial x^j} = \\
&= -\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\left(\frac{r^2}{4t^2} - \frac{1}{2t}\mathrm{trace}(g^{ij})\right) e^{-r^2/4t} \approx \\
&\qquad - \approx \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\left(\frac{r^2}{4t^2} - \frac{n}{2t}\right) e^{-r^2/4t} = -\partial_t Q.
\end{aligned}
$$

□

Общий случай. Будем искать решение системы

$$
\boxed{\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta_x\right) k_t = 0, t > 0 \\ k_t \xrightarrow{t \to 0} \delta(x) \end{cases}}
$$

в виде $k_t = Q(v_0 + tv_1 + t^2 v_2 \ldots)$ с неизвестными коэффициентами $v_j = v_j(x)$ (теория возмущений).

**Лемма** (формула Лейбница) Для оператора

$$\Delta = -g^{ij}\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + b^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i} + c(x)$$

Имеем:

$$[\Delta, f] = -g^{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - 2g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} + b^i\frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Док-во — прямое вычисление. □

Полагая $f = Q$, получаем

$$
\begin{aligned}
Q^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial t}(Qv) + \Delta(Qv)\right) = \\
&= \boxed{\left(\frac{a_1}{t} + a_2\right) v + \dot{v} + \Delta v + \left(g^{ij}\frac{\partial v}{\partial x^j} + \frac{1}{2}b^i v\right)\frac{x^i}{t}}
\end{aligned}
$$

(используем соотношение $Q^{-1}\partial Q/\partial x^i = -x^i/2t$).

Надо заменить: $g^{ij}x^i\frac{\partial}{\partial x^j} = x^j\frac{\partial}{\partial x^j} = r\frac{\partial}{\partial r}$ — радиальное векторное поле

$\Rightarrow$ Рекуррентное соотношение:

$$\boxed{r\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)v_{k+1}+\left(k+1+\underbrace{a_1+b^ix^i/2}_{=br}\right)v_{k+1}=\underbrace{-\Delta v_k-a_2v_k}_{=Pv_k}} \text{ при } k\geq -1$$

Решение рекуррентной системы:

1. Перепишем в виде полного дифференциала:

$$\boxed{\frac{r}{R_k(r)}\frac{d}{dr}\left(R_k(r)v_{k+1}\right)=Pv_k}, \text{ где } R_k(r)=r^{k+1}\exp\left(\int\limits_0^r b(s)ds\right)$$

Общее решение уравнения:

$$R_k(r)v_{k+1}=\int\limits_0^r\frac{R_k(y)}{y}(Pv_k)(y)dy+Const.$$

2. Мы ищем фундаментальное решение $\Rightarrow$ $v_0(0)=1$ $v_0=1/R_{-1}(r)$

3. При $k\geq 1$ требование гладкости $v_{k+1}$ $\Rightarrow$ константу надо брать нулевой.

Таким образом, мы построили ряд $Q(v_0+tv_1+\ldots)$ такой что

$$\begin{cases}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\Delta_x\right)\left[Q(v_0+tv_1+\ldots+t^Nv_N)\right]=t^NQu,\\ Q(v_0+tv_1+\ldots+t^Nv_N)\longrightarrow\delta(x) \text{ при } t\to 0\end{cases}$$

где $u$ — гладкая функция $x$.

## III.3. Связь асимптотического решения с точным

**Принцип Дюгамеля:** решение неоднородного уравнения

$$(\partial_t + \Delta_x) v_t = \widetilde{v}_t$$

с нулевыми начальными данными $v_0 = 0$ имеет вид:

$$v_t = \int\limits_0^t e^{-(t-t')\Delta} \widetilde{v}_{t'} dt'$$

Док-во. Достаточно продифференцировать. □

**Следствие** (априорная оценка)

$$\|v_t\|_{H^k} \leq Ct \sup_{0<t'\leq t} \|\widetilde{v}_t\|_{H^k}$$

Завершение доказательства теоремы:

Наше асимптотическое решение (конечный его кусок) удовлетворяет соотношению:

$$(\partial_t + \Delta_x) \widetilde{w}_t = t^N r(x,t), \qquad (*)$$

где остаток $r(x,t)$ — гладкий по $x$ и непрерывный по $t \in [0,1]$.

$\Rightarrow$ Вычитая (*) из $(\partial_t + \Delta) k_t = 0$, получаем $\|k_t - \widetilde{w}_t\|_{H^k} \leq t^{N+1} C \Rightarrow$

$$\boxed{|k_t(x) - \widetilde{w}_t(x)| \leq C t^{N+1}}, \qquad \forall x$$

(по теореме вложения).

разложение ядра уравнения теплопроводности полностью обосновано.