Лекция 6. Теорема об индексе

Часть I. Формулировка основного результата.

I.1. Локальная теорема об индексе

Для оператора Дирака $\not{D}$ справедливо соотношение:

$$\boxed{\lim_{t\to 0}\bigl[\operatorname{tr}_s k_t(x,x)dx\bigr] = (2\pi i)^{-n/2}\left[\det{}^{1/2}\left(\frac{\Omega/2}{\operatorname{sh}\Omega/2}\right)\right]_{(n)}}$$

- $k_t(x,x)$ — ядро Шварца оператора $e^{-t\not{D}^2}$
- $\operatorname{tr}_s : \operatorname{End}(S) \to \mathbb{C}$ — суперслед;
- dx — Риманов элемент объёма;
- $\Omega = \frac{1}{2}R^i_{jkl}dx^k \wedge dx^l$ — форма кривизны многообразия.
- $\operatorname{sh} x = (e^x - e^{-x})/2$
- n — размерность многообразия M.
- $[\cdots]_{(n)}$ — взятие компоненты старшей степени

Следствие. (теорема об индексе для оператора Дирака)

$$\boxed{\operatorname{ind}\not{D}_+ = (2\pi i)^{-n/2}\int\limits_M \det{}^{1/2}\left(\frac{\Omega/2}{\operatorname{sh}\Omega/2}\right) \equiv \int\limits_M \widehat{A}(M)}$$

здесь $\widehat{A}(M)$ — характеристический класс многообразия M.
Док-во (локальная теорема $\Rightarrow$ глобальная теорема) Формула Зингера–Маккина дает

$$\operatorname{ind}\not{D}_+ = \operatorname{Tr}_s e^{-t\not{D}^2} = \int\limits_M \operatorname{tr}_s k_t(x,x)dx.$$

Осталось взять предел $t \to 0$ и воспользоваться локальной теоремой.

$\square$

I.2. Вопрос: $\boxed{\text{каков явный вид выражения}}$ $(2\pi i)^{-n/2} \int\limits_M \det^{1/2}\left(\frac{\Omega/2}{\operatorname{sh}\Omega/2}\right)$?

Ответ: Можно получить разложения:

$$\frac{z}{\operatorname{sh} z} = \frac{z}{z + \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} + \cdots} = 1 - \frac{z^2}{6} + \frac{7z^4}{360} + \cdots$$

$$\det(1+y) = 1 + \operatorname{tr} y - \frac{1}{2}\left(\operatorname{tr} y^2 - \operatorname{tr}^2 y\right) + \frac{1}{6}\left(\operatorname{tr}^3 y - 3\operatorname{tr} y \operatorname{tr} y^2 + 2\operatorname{tr} y^3\right) + \\ + \frac{1}{24}\left(\operatorname{tr}^4 y - \operatorname{tr}^2 y \operatorname{tr} y^2 + 8\operatorname{tr} y \operatorname{tr} y^3 - 6\operatorname{tr} y^4\right)\ldots$$

$$(1+y)^{1/2} = 1 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} + \cdots$$

Примеры. Рассмотрим значения $n = 2, 4, 6, 8$.
1. Форма $\Omega/\operatorname{sh}\Omega$ определяется $\Omega^2 \Rightarrow$ в размерностях $4k+2$ она $\equiv 0$. В частности $\operatorname{ind} \not{D}_+ = 0$ при $n = 2$ и 6.
2. На четырехмерном многообразии:

$$\operatorname{ind} \not{D}_+ = \int\limits_{M^4} \frac{\operatorname{tr}\Omega^2}{192\pi^2} \qquad\qquad 192 = (-4)\times 4 \times (-6) \times 2$$

Упражнение: Для восьмимерного многообразия

$$\operatorname{ind} \not{D}_+ = \int\limits_{M^8} \left(\alpha_1 \operatorname{tr}\Omega^4 + \alpha_2(\operatorname{tr}\Omega^2)^2\right).$$

Найдите коэффициенты $\alpha_{1,2}$.

I.3. Что предстоит доказать?

Асимптотическое разложение (получили в предыдущей лекции):

$$k_t(x,x) \sim (4\pi t)^{-n/2} \sum_{j\geq 0} k_j(x) t^j$$

фундаментального решения уравнения теплопроводности.

Коэффициенты определяются:

1) $\boxed{\textit{локально}\text{, т.е. считаем } x \text{ лежит в окр-ти начала координат в } \mathbb{R}^n}$ (следует из локальности разложения теплопроводности);

2) $\boxed{\textit{алгебраически}\text{, т.е. работаем с асимптотическими решениями}}$ (следует из существования и единственности асимптотич. решений).

Теорема об индексе утверждает для оператора Дирака:

1) $\boxed{\begin{array}{c} \textit{фантастические} \\ \textit{сокращения} \\ \text{(Атья–Ботт–Патоди)} \end{array} : \operatorname{tr}_s k_j(x) \equiv 0 \text{ при } j < n/2}$

2) $\boxed{\text{явная формула для суперследа в терминах кривизны}}$

Проблема: $\boxed{\begin{array}{c} \text{коэффициенты разложения зависят от младших членов} \\ \text{оператора и их производных.} \end{array}}$

План доказательства (по Гецлеру)

1) $\boxed{\begin{array}{c} \text{выделить из оператора } \not{D}^2 \text{ такую } \textit{старшую часть}, \\ \text{которая бы определила } \operatorname{tr}_s k_{n/2} \end{array}}$

a) дать формулу для суперследа

b) старшая часть оператора и группа растяжений

c) старшая часть оператора по Гецлеру.

2) $\boxed{\text{старшая часть оператора } \not{D}^2} = \boxed{\begin{array}{c} \text{квантовый осциллятор} \\ \text{с матричными коэффиц.} \end{array}}$

3) $\boxed{\text{вычисление индексной формы для осциллятора}}$

a) редукция к скалярному осциллятору

b) фундаментальное решения для осциллятора

Часть II. Старшая часть операторов (по Гецлеру)

II.1. В чем фантастика суперследа?

Лемма Березина. Для элемента $a \in \mathrm{End}(S) \simeq \mathbb{C}\mathrm{l}(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$\boxed{\mathrm{tr}_s\, a = (-2i)^{n/2} \int \sigma(a),}$$

где

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \int : \Lambda(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ e_1 \dots e_n & \mapsto & 1 \end{array}} \text{ — \textit{интеграл Березина}}$$

$$\begin{array}{ccc} \sigma : \mathbb{C}\mathrm{l}(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\simeq} & \Lambda(\mathbb{R}^n) \\ e_{i_1} \dots e_{i_k} & \mapsto & e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} \end{array}$$

— символьное отображение.

Т.е. $\boxed{\text{суперслед определяется компонентой старшей степени}}$

<u>Док-во.</u> 1) $\mathrm{tr}_s\, a = \mathrm{tr}(\gamma a)$ для инволюции $\gamma|_{S_\pm} = \pm 1$, $\gamma = i^{n/2} e_1 \dots e_n$.

Достаточно доказать, что

$$\mathrm{tr}(e_{i_1} \dots e_{i_k}) = \begin{cases} 2^{n/2}, & \text{если } k = 0, \\ 0, & \text{если } k > 0. \end{cases}$$

2) $\mathrm{tr}\, 1 = \dim S = 2^{n/2}$. Докажем теперь второе равенство:

a) k нечетно. $e_j \gamma + \gamma e_j = 0 \Rightarrow \boxed{e_{i_1} \dots e_{i_k} : S_\pm \to S_\mp} \Rightarrow$ след нулевой.

b) k четно $\Rightarrow 2\,\mathrm{tr}\, e_1 e_2 \dots e_{2m} = \mathrm{tr}[e_1, e_2 \dots e_{2m}] = 0$ как след коммут.

$\square$

II.2. Старшая часть оператора и группа растяжений

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{оператор } D \text{ порядка } k \\ \sum\limits_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x)(-i\partial/\partial x)^\alpha \end{array}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} \text{старшая часть в точке } 0 \\ D = \sum\limits_{|\alpha| = m} a_\alpha(0)(-i\partial/\partial x)^\alpha \end{array}}$$

Утвержд. $\boxed{\begin{array}{c} \text{старшая часть оператора } D \\ \text{порядка } m \text{ в точке } x = 0 \end{array}} = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^m H_\varepsilon D H_\varepsilon^{-1},$

где H_ε — группа растяжений $(H_\varepsilon u)(x) = u(\varepsilon x)$

<u>Док-во.</u> Вычисление проводится без труда. $\square$

Замечание: $\mathrm{ord}\, \partial/\partial x = 1$, $\mathrm{ord}\, x = -1$.

II.3. Старшая часть оператора (по Гецлеру).

Мы растягиваем: $\boxed{\begin{array}{c} k_t(x) \in C^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \Lambda(n)) \\ \text{— фундам. решение с центром в 0.} \end{array}}$

Чтобы определить главную часть надо определить:

1) растяжения по t:

$$\boxed{\text{однородность оператора } \partial_t - \partial_x^2} \Rightarrow \boxed{\operatorname{ord} \partial_t = 2}.$$

2) растяжения форм.

Лемма $\boxed{\begin{array}{c} \text{индексн.вклад } \mathrm{tr}_s(k_{n/2}(0))dx \\ \text{инвариантен относительно} \\ \text{растяжений} \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{c} \text{внешние формы степени } n \\ \Lambda^n(n) \text{ имеют вес } -n \end{array}}$

Док-во. По лемме Березина $\mathrm{tr}_s(k_{n/2}(0))dx = \left[\int \sigma(k_{n/2}(0))\right] dx.$

При масштабировании $dx \mapsto \varepsilon^n dx$. Поэтому надо компенсировать это растяжением $\omega_n \mapsto \varepsilon^{-n}\omega_n$. $\square$

Опр. $\boxed{\begin{array}{c} \textit{Масштабирование Гецлера } G_\varepsilon \\ \text{на пространстве} \\ C^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \Lambda(n)) \end{array}}$ $\boxed{(G_\varepsilon \omega)(t,x) := \sum_j \varepsilon^{-j} \omega_j(\varepsilon^2 t, \varepsilon x)}$

Опр. $\boxed{\begin{array}{c} \textit{Старшая часть по Гецлеру} \text{ в точке } x = 0 \\ \text{оператора } A : C^\infty(\mathbb{R}^n, \Lambda(n)) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n, \Lambda(n)) \text{ порядка } k \end{array}}$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{предел: } A_0 := \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^k G_\varepsilon A G_\varepsilon^{-1} \\ \text{(сходимость коэффициентов в } C^\infty) \end{array}}$$

По построению получаем:

Предложение.

1. Вклад в индекс $\operatorname{tr}_s k_{n/2}(0)dx$ инвариантен относительно масштабирования и определяется старшей частью оператора (когда существует!).

2. $\boxed{\begin{array}{c}\text{оператор } D^2 \text{ имеет старшую}\\ \text{часть по Гецлеру в т.} x=0\end{array}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{для } D^2 \text{ при } x=0 \text{ справедливы}\\ \text{фантастические сокращения:}\\ \operatorname{tr}_s k_j(0)=0 \text{ при } j<n/2\end{array}}$

Док-во. Первая часть верна по построению. Объясним сокращения.

Обозначения:

$D_\varepsilon^2 = \varepsilon^2 G_\varepsilon D G_\varepsilon^{-1}$	— масштабированный оператор
$k_t^\varepsilon(x) = \varepsilon^n (G_\varepsilon k_t)(x)$	— его фундаментальное решение

1. Существует предел $D_\varepsilon^2 \to D_0^2$. $\Rightarrow$

$$k_t^\varepsilon(x) \to k_t^0(x) \text{ и } \boxed{\begin{array}{c}\text{сходятся коэффициенты}\\ \text{асимптотического разложения}\end{array}}$$

2. С другой стороны,

$$k_t^\varepsilon(0) = \varepsilon^n (G_\varepsilon k_t)(0) \sim$$

$$\sim \varepsilon^n G_\varepsilon (t^{-n/2} \sum_{j,k} \omega_{jk} t^j) = \{\text{степень } \omega_{jk} \text{ равна } k\}$$

$$= t^{-n/2} \sum_{jk} \varepsilon^{-k+2j} \omega_{jk} t^j$$

Из п.1 следует: сингулярные члены нулевые: $\omega_{jk} = 0$ при $-k+2j<0$

$\Rightarrow \operatorname{tr}_s \omega_j = 0$ при $j < n/2$. $\square$

Замечание.

переменные	коммутирующие	антикоммутирующие
	$x^i x^j = x^j x^i$	$x^i x^j + x^j x^i = 0$
пр-во квантования	$L^2(\mathbb{R}^n)$	S — спиноры
операторы	диффер. операторы в L^2	$\operatorname{End} S \simeq \mathrm{Cl}(n) \simeq \Lambda(n)$
порядок операт-в	$\operatorname{ord} D$	$\deg \omega$

Порядок Гецлера отвечает произведению теорий — *суперсимметричной квантовой механике* — теории операторов в пр-ве $L^2(\mathbb{R}^n) \otimes \Lambda(n)$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{порядок}\\ \text{оператора}\end{array}} = \boxed{\text{число дифференцирований}} + \boxed{\text{число внеш. умнож.}}$$

Часть III. Старшая часть оператора (Дирак)^2.

Предложение. Старшая часть оператора $\not{D}^2$ в точке $x=0$ равна

$$\boxed{\not{D}_0^2 = -\sum_i \left(\partial_i + \frac{1}{4}\Omega_{ij}x^j\right)^2}, \text{ где } \quad \begin{array}{c}\Omega_{ij} = 1/2 R_{ijkl}(0)dx^k \wedge dx^l \\ \text{— форма кривизны}\end{array}$$

(в нормальной системе координат $x^1, x^2, \dots, x^n$).

Док-во.

1. Сначала вычислим старш.часть для спинорной связности $\overline{\nabla}$. В нормальных координатах имеем:

$$\overline{\nabla}_k = \frac{\partial}{\partial x^k} - \frac{1}{4}\Gamma^i_{kj}c^ic^j = \boxed{\frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{1}{8}R^i_{kjl}(0)x^lc^ic^j} + O(x^2c^2).$$

С другой стороны, клиффордово умножение на $c^i \in \mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}\mathrm{l}(n)$ имеет порядок 1 и главная часть — внешнее умножение:

$$G_\varepsilon c^i G_\varepsilon^{-1}\omega^k = G_\varepsilon(c^i \wedge - c^i \lrcorner)\omega^k\varepsilon^{-k} = \varepsilon^{-1}\left(c^i \wedge \omega^k - \varepsilon^2 c^i \lrcorner \omega^k\right) \sim \varepsilon^{-1}c^i \wedge \omega^k$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{старш.часть } \overline{\nabla} = \begin{array}{c}\text{выраж.в рамке с заменой} \\ \text{клифф.умножения на внешнее}\end{array}}$$

2. Осталось подставить это выражение в формулу Вейценбека:

$$\not{D}^2 = -\sum_{ij} g^{ij}\left(\overline{\nabla}_i\overline{\nabla}_j - \sum_k \Gamma^k_{ij}\overline{\nabla}_k\right) + \frac{R}{4}$$

Производя вычисление по модулю операторов порядка ≤ 1, получаем:

$$\not{D}^2 \sim -\sum_{ij}\delta^{ij}\overline{\nabla}_i\overline{\nabla}_j \sim -\sum_j\left(\frac{\partial}{\partial x^j} + \frac{1}{8}R^i_{kjl}x^lc^ic^j\right)^2$$

При $\varepsilon \to 0$ клиффордово умножение переходит во внешнее и получаем:

$$\not{D}_0^2 = -\sum_j\left(\frac{\partial}{\partial x^j} + \frac{1}{4}\Omega_{jl}x^l\right)^2.$$

$\square$

Часть IV. Фундаментальное решение для матричного осциллятора.

Оператор
$$\mathbb{H} = -\sum_i \left(\partial_i + \frac{1}{4} \sum_j \Omega_{ij} x^j \right)^2$$
Найдем фундаментальное решение в явном виде.

IV.1 Редукция к скалярному осциллятору.

Коэффициенты Ω_{ij}:

1) лежат в коммутативной алгебре четных форм;

2) образуют кососимметрическую матрицу $\Omega = (\Omega_{ij})$.

Рассмотрим числовые коффициенты: $\Omega_{ij} \in \mathbb{R}$, (если решение будет аналитическим, то оно будет верно и в случае элементов в коммутативной алгебре.

1. В ортонормир.базисе Ω — прямая сумма матриц 2×2: $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$

Для двумерной Ω имеем
$$\mathbb{H} = \underbrace{\Delta - \frac{a^2 r^2}{16}}_{L_0} + \underbrace{a(y\partial_x - x\partial_y)/2}_{L_1}, \quad r^2 = x^2 + y^2.$$

$\boxed{L_0 \text{ инвариантен отн-но вращений}} \Rightarrow \boxed{\text{фунд.решение инвариантно}}$

Оператор L_1 не влияет на фунд.решение, так как $L_1 f(r) \equiv 0$.

$\boxed{\begin{array}{c} L_0 = -\partial_x^2 - \frac{a^2x^2}{16} - \partial_y^2 - \frac{a^2y^2}{16} \\ \text{— сумма осцилляторов} \end{array}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} \text{фундаментальное решение=} \\ \text{произведение одном.фунд.решений} \end{array}}$

IV.2. Фундаментальное решение для осциллятора — решение задачи Коши $\begin{cases} \partial_t u = -\partial_x^2 u + \omega^2 x^2 u \\ u \xrightarrow{t\to 0} \delta(x) \end{cases}$

$\boxed{\begin{array}{c} \text{Будем искать в гауссовом виде:} \\ u = \exp(a(t)x^2/2 + b(t)) \end{array}} \Rightarrow \boxed{\dot{a}/2 = \omega^2 + a^2, \dot{b} = a}$

Общее решение:
$$a = -\omega \operatorname{ctg}(2\omega t + C) \qquad b = -1/2 \ln \sin(2\omega t + C) + D$$

Начальное условие фиксирует константы: $C = 0, D = 1/2 \ln(\omega/2\pi)$

Поэтому получаем:

Фундаментальное решение для осциллятора (формула Меллера) :

$$u(t,x) = \Big(\frac{\omega}{2\pi \sin 2\omega t}\Big)^{1/2} \exp\left(-\frac{\omega x^2}{2}\operatorname{ctg} 2\omega t\right)$$

(определяется ω^2)

IV.3. Фундам. решение в многом. случае.

В двумерном случае ($\omega = a/4$) есть:

$$(4\pi t)^{-1}\left(\frac{at/2}{\sin at/2}\right)\exp\left(-(ta/2)\operatorname{ctg}(at/2)\frac{r^2}{4t}\right)$$

Или в терминах матрицы $\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ $\Omega^2 = -a^2 I$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\operatorname{sh}\Omega}{\Omega} = \frac{\sin a}{a} I} \text{ и } \boxed{\frac{\coth\Omega}{\Omega} = \frac{\operatorname{ctg} a}{a} I}$$

Т.е. для фунд.решения двумерного осциллятора имеем:

$$u(t,x) = (4\pi t)^{-1}\det{}^{1/2}\left(\frac{\Omega t/2}{\operatorname{sh}\Omega t/2}\right)\exp\left(-x^T\frac{\Omega t/2}{\operatorname{th}(\Omega t/2)}x/4t\right)$$

В многомерном случае другой предмножитель $(4\pi t)^{-n/2}$

Окончание доказ-ва локальной теоремы об индексе.

$k_t(x)$ — фундаментальное решение уравнения теплопров.для $\not{D}^2 \Rightarrow$

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\big[\operatorname{tr}_s k_t(0)dx\big] &= \operatorname{tr}_s k^0_{n/2}(0)dx - \boxed{\text{редукция к осциллятору}} \\ &= (-2i)^{n/2}(4\pi t)^{-n/2}\left[\det{}^{1/2}\left(\frac{\Omega t/2}{\operatorname{sh}\Omega t/2}\right)\right]_{(n)} \\ &= (2\pi i)^{-n/2}\left[\det{}^{1/2}\left(\frac{\Omega/2}{\operatorname{sh}\Omega/2}\right)\right]_{(n)}\end{aligned}$$

Теорема об индексе установлена. □