Лекция 7. Индексы геометрических операторов

Часть I. Индекс оператора Дирака с коэффициентами

Напоминание:

- векторное расслоение E на M
- связность $\nabla^E : \Gamma(E) \to \Gamma(T^*M \otimes E)$ согласов.с метрикой:
  $X(e_1, e_2) = (\nabla_X^E e_1, e_2) + (e_1, \nabla_X^E e_2)$, X — векторное поле

связность в произведении $\mathcal{S} \otimes E$:

$$\overline{\nabla}^E = \overline{\nabla} \otimes 1 + 1 \otimes \nabla^E$$

$$\Downarrow$$

Оператор Дирака с коэффициентами в E

$$D\!\!\!/_E : \Gamma(\mathcal{S} \otimes E) \xrightarrow{\overline{\nabla}^E} \Gamma(T^*M \otimes \mathcal{S} \otimes E) \overset{c\otimes 1}{\to} \Gamma(\mathcal{S} \otimes E)$$

Чему равен индекс $\operatorname{ind}(D\!\!\!/_E)_+$?

Теорема.

$$\operatorname{ind}(D\!\!\!/_E)_+ = (2\pi i)^{-n/2} \int\limits_M \det{}^{1/2}\left(\frac{\Omega/2}{\operatorname{sh}\Omega/2}\right) \operatorname{tr}\exp(-F)$$

где $F = (\nabla^E)^2$ — кривизна связности.

Задание.

E — вещественное	E — комплексное
$\Downarrow$	$\Downarrow$
$\operatorname{tr} e^{-F} \in \Lambda^{4*}(M)$	$\operatorname{tr} e^{-F} \in \Lambda^{2*}(M)$

используйте кососимметричность $F^t = -F$

Важность теоремы:

1) дает индексы других геом. операторов в качестве частных случаев;

2) позволяет вывести формулу индекса произвольных операторов.

Докажем соответствующую локальную теорему об индексе

<u>Док-во.</u>

0. Уравн.теплопроводности $\Rightarrow$ $\boxed{\operatorname{ind}(\not{D}_E)_+ = \int_M [\operatorname{tr}_s k_t(x,x)]\,dx}$

1. *Формула Вейценбека* (упражнение):

$$\boxed{(\not{D}_E)^2 = \Delta_{\mathcal{S}\otimes E} + \frac{R}{4} + \underline{\underline{\widetilde{F}}}}, \qquad \text{где}$$

- $\Delta_{\mathcal{S}\otimes E} := \left(\overline{\nabla}^E\right)^*\left(\overline{\nabla}^E\right) = -\sum_{ij} g^{ij}\left(\overline{\nabla}_i^E\overline{\nabla}_j^E - \sum_k \Gamma_{ij}^k \overline{\nabla}_k^E\right)$ — Лапласиан;
- $\widetilde{F} = \frac{1}{2}F(e_i,e_j)c^ic^j$, $F_{ij} := F(e_i,e_j)$.

2. *Вычисление старшей части оператора* $(\not{D}_E)^2$ в точке.
Фиксируем:

- нормальные координаты $x^1,\dots,x^n$,
- ортогональный репер $e_1,\dots,e_n$ в окрестности нуля (перенос вдоль геодезических) $\nabla_{\dot\gamma}e = 0$
- $\boxed{\text{ортогональный репер } E_1,\dots,E_N \text{ в } E \text{ в окрестности нуля}}$ $-||-$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\text{для } E \text{ и } TM \text{ символы Кристоффеля нулевые при } x=0}$$

$$\overline{\nabla}_i^E = \partial_i + \frac{1}{8}R_{ijkl}(0)x^jc^kc^l + O(|x|c)\otimes\operatorname{End}(E) + O(|x|^2c^2)$$

Масштабирование Гецлера дает $\boxed{(\not{D}^2_E)_\varepsilon \xrightarrow{\text{при } \varepsilon\to 0} -\sum_j(\partial_i - \frac{1}{4}\Omega_{ij}x^j)^2 + F \equiv \mathbb{H} + F}$

— осциллятор в постоянном поле.

3. Фундам.решение для осциллятора : $\boxed{\begin{array}{c}\text{Задача Коши:}\\ \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = (\mathbb{H}+F)u \\ u(t) \xrightarrow{t\to 0} \delta(x)I \end{cases}\end{array}}$ $\mathbb{H}$ и F коммутируют $\Rightarrow$

Решение задачи Коши:

$$u(t,x) = (4\pi t)^{-n/2} \det{}^{1/2}\left(\frac{\Omega t/2}{\operatorname{sh}\Omega t/2}\right) \exp\left(-x^T \frac{\Omega t/2}{\operatorname{th}(\Omega t/2)} x \frac{1}{4t} - \underline{\underline{tF}}\right)$$

4. Вычисление локальной индексной плотности:

$$\lim_{t\to 0}\bigl[\operatorname{tr}_s k_t(0)dx\bigr] =$$

$$\{\text{пост.член в}\}(-2i)^{n/2}(4\pi t)^{-n/2}\left[\det{}^{1/2}\left(\frac{\Omega t/2}{\operatorname{sh}\Omega t/2}\right)\operatorname{tr}\exp(-tF)\right] =$$

$$= (2\pi i)^{-n/2}\left[\det{}^{1/2}\left(\frac{\Omega/2}{\operatorname{sh}\Omega/2}\right)\operatorname{tr}\exp(-F)\right]_{(n)}$$

$\square$

Часть II. Индексы геометрических операторов.

План вычисления:

1) вычислить $\operatorname{tr} e^{-F}$ для вспомогательных расслоений;

2) привести подобные члены.

II.1 Индекс оператора Эйлера.

$$\boxed{D = d + d^* : \Lambda(M) \longrightarrow \Lambda(M), \qquad \Lambda(M) = \Lambda^{ev}(M) \ominus \Lambda^{odd}(M)}$$

$$\operatorname{ind} D_+ = \chi(M) = \dim H^{ev}(M) - \dim H^{odd}(M)$$

Знаем: D эквивалентен $\not{D}$ с коэффициентами в $\mathcal{S}_+^* \ominus \mathcal{S}_-^*$.

Поэтому $\boxed{\text{надо вычислить } \operatorname{tr} e^{-F(\mathcal{S}_+^*)} - \operatorname{tr} e^{-F(\mathcal{S}_-^*)} = \operatorname{tr}_s e^{-F(\mathcal{S}^*)}}$

1. $F(\mathcal{S}^*) = -F(\mathcal{S}) = -\left(-\dfrac{1}{4}\Omega_{jk}c^i c^k\right)$ — кривизна спинорн.расслоения.

2. **Лемма.** $A = (a_{ij})$ — кососимметрическая матрица $\Rightarrow$

$$\boxed{\operatorname{tr}_s \exp\left(\frac{1}{2}a_{ij}c^ic^j\right) = (-2i)^{n/2}\det{}^{1/2}\left(\frac{\operatorname{sh} A}{A}\right)\operatorname{Pf}A.} \qquad (*)$$

Пфаффиан Pf (отступление)

$\boxed{\text{кососимметрическая матрица } A = (a_{ij})} \Rightarrow \boxed{\det A = (\operatorname{Pf}A)^2, \text{ где } \operatorname{Pf}A \text{ — полином от коэффициентов матрицы}}$

Например:

$$\operatorname{Pf}\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix} = -a$$

Общий случай ($2k \times 2k$-матрицы)
$\operatorname{Pf}(A)e^1 \wedge e^2 \wedge \ldots e^{2k} = \frac{1}{k!}\left(a_{ij}e^i \wedge e^j\right)^k$

Свойство $\operatorname{Pf}(X^tAX) = \det X \cdot \operatorname{Pf}A$ (*инвариантность*)

Док-во Леммы.

$\boxed{\text{уравнение } (*) \ \mathbf{SO}(n)\text{-инвариантно}} \Rightarrow \boxed{\text{достаточно доказать для } 2\times 2 \text{ блока } A = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}}$

левая часть: $\operatorname{tr}_s e^{-ac^1c^2} = \operatorname{tr}_s(-\sin a \frac{ic^1c^2}{i})\boxed{= 2i\sin a}$

правая часть: $= (-2i)\frac{\sin a}{a}(-a)\boxed{= 2i\sin a}$

(здесь используем соотношение: $\exp(-ac^1c^2) = \cos a - \sin ac^1c^2$) $\square$

$\Rightarrow$ Подставляя в формулу спинорную кривизну, получаем

$$\operatorname{tr} e^{-F} = (-2i)^{n/2}\cdot\det{}^{1/2}\left(\frac{\operatorname{sh}\Omega/2}{\Omega/2}\right)\cdot\operatorname{Pf}\left(-\frac{\Omega}{2}\right) = (-2i)^{n/2}\cdot 1\cdot\operatorname{Pf}\left(-\frac{\Omega}{2}\right)$$

$$\boxed{\chi(M) =}\operatorname{ind} D_+ = (2\pi i)^{-n/2}(-2i)^{n/2}\int\limits_M 1\cdot\operatorname{Pf}\left(-\frac{\Omega}{2}\right) = \boxed{\int\limits_M \operatorname{Pf}\left(\frac{\Omega}{2\pi}\right)}$$

— *формула Гаусса–Бонне–Черна.*

Пример. $M^2 \Rightarrow \Omega = \begin{pmatrix} 0 & R \\ -R & 0 \end{pmatrix}\mathrm{dVol} \Rightarrow$ теорема Гаусса–Бонне

$$\chi(M^2) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{M^2} R\,\mathrm{dVol}$$

Например, на сфере $\mathbb{S}^2$ имеем $\chi(\mathbb{S}^2) = (2\pi)^{-1}\cdot 1\cdot 4\pi = 2$

II.2 Индекс оператора сигнатуры.

$$\boxed{D = d + d^* : \Lambda(M) \longrightarrow \Lambda(M), \qquad \Lambda(M) = \Lambda^+(M) \ominus \Lambda^-(M)}$$

$$\operatorname{ind} D_+ = \operatorname{sign}(M) = \text{сигнатура формы пересечения на } M$$

Знаем: D эквивалентен $\not{D}$ с коэффициентами в $\mathcal{S}_+^* \oplus \mathcal{S}_-^*$.

Надо вычислить $\operatorname{tr} e^{-F(\mathcal{S}_+^*)} + \operatorname{tr} e^{-F(\mathcal{S}_-^*)} = \operatorname{tr} e^{-F(\mathcal{S}^*)}$

Лемма. $A = (a_{ij})$ — кососимметрическая матрица $\Rightarrow$

$$\boxed{\operatorname{tr} \exp\left(\frac{1}{2} a_{ij} c^i c^j\right) = 2^{n/2} \det{}^{1/2} (\operatorname{ch} A).}$$

Док-во. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$

левая часть: $\operatorname{tr} e^{-ac^1c^2} = \operatorname{tr}(\cos aI) = \boxed{2\cos a}$

правая часть: $= 2\det{}^{1/2}(\cos aI) = \boxed{2\cos a}$ □

$\Rightarrow$ подставляя спинорную кривизну, получаем:

$$\boxed{\operatorname{sign}(M) =} \operatorname{ind} D_+ = (\pi i)^{-n/2} \int\limits_M \det{}^{1/2} \left(\frac{\Omega/2}{\operatorname{sh} \Omega/2} \operatorname{ch} \Omega/2\right) =$$

$$= \boxed{(\pi i)^{-n/2} \int\limits_M \det{}^{1/2} \left(\frac{\Omega/2}{\operatorname{th} \Omega/2}\right)}$$

— *формула Хирцебруха* сигнатуры $4k$-мерного многообразия ($k = n/4$).

Пример. $M^4 \Rightarrow$

$$\operatorname{sign} M^4 = -\int\limits_M \frac{\operatorname{tr} \Omega^2}{24\pi^2} = -8 \operatorname{ind} \not{D}_+.$$

$\operatorname{sign}(\mathbb{CP}^2) = 1 \Rightarrow \operatorname{ind} \not{D}_+ = -1/8$ $\boxed{!!!!}$

Задание. Почему индекс стал дробным числом?

II.3 Индекс оператора Тодда на кэлеровом многообр.

$$\boxed{\overline{\partial}+\overline{\partial}^*:\Lambda^{0,*}(M)\longrightarrow\Lambda^{0,*}(M),\qquad \Lambda^{0,*}(M)=\Lambda^{0,ev}(M)\ominus\Lambda^{0,odd}(M)}$$

$$\operatorname{ind}(\overline{\partial}+\overline{\partial}^*)_+=?$$

Знаем: $\overline{\partial}+\overline{\partial}^*$ эквивалентен $\not{D}$ с коэффициентами в $\sqrt{\Lambda^{0,n}(M)}$.

Разложение $\boxed{TM\otimes\mathbb{C}=T^{1,0}M\oplus\overline{T^{1,0}M}}$ (компл.расслоения)
(в координатах разложение $\partial/\partial x,\partial/\partial y$ по базису $\partial/\partial z,\partial/\partial\overline{z}$)

$\boxed{\text{условие Кэлера}}\Rightarrow\boxed{\text{Форма кривизны (и связность) есть прямая сумма } \Omega=\Omega_+\oplus\Omega_-}$

(здесь Ω — кривизна TM, Ω_+ — кривизна $T^{1,0}M$)

1.
$$\det{}^{1/2}\left(\frac{\Omega/2}{\operatorname{sh}\Omega/2}\right)=\det{}^{1/2}\left(\frac{\Omega_+/2}{\operatorname{sh}\Omega_+/2}\cdot\frac{-\Omega_+/2}{\operatorname{sh}-\Omega_+/2}\right)=\det\left(\frac{\Omega_+/2}{\operatorname{sh}\Omega_+/2}\right)$$

2. Вычислим кривизну расслоения коэффициентов

$$F(\sqrt{\Lambda^{0,n}M})=\frac{1}{2}F(\Lambda^{0,n}M)=\frac{1}{2}\operatorname{tr}F(\Lambda^{0,1}M)=$$
$$=\frac{1}{2}\operatorname{tr}F(T^{1,0}M)\equiv\frac{1}{2}\operatorname{tr}\Omega_+$$

(первое и второе равенства — упражн.по лин.алгебре — форма связности в $\sqrt{E}$ есть половина формы связности в E, и форма связности в $\det E$ есть след формы связности для E, третье — вытекает из изоморфизма соответств.расслоений)

Подставим, 1) и 2) в формулу индекса и учтем, что $e^{\operatorname{tr}A}=\det e^A\Rightarrow$

$$\boxed{\operatorname{ind}(\overline{\partial}+\overline{\partial}^*)_+}=(2\pi i)^{-n}\int\limits_M\det{}^{1/2}\left(\frac{\Omega/2}{\operatorname{sh}\Omega/2}\right)\operatorname{tr}e^{-F(\sqrt{\Lambda^{0,n}M})}=$$

$$=(2\pi i)^{-n}\int\limits_M\det\left(\frac{\Omega_+}{e^{\Omega_+/2}-e^{\Omega_+/2}}e^{-\Omega_+/2}\right)=\boxed{=(2\pi i)^{-n}\int\limits_M\det\left(\frac{\Omega_+}{e^{\Omega_+}-1}\right)}$$

— *формула Римана-Роха-Хирцебруха.*

Для получения предыдущих формул мы требовали наличия спин-структуры. Оказывается, формулы верны для произвольного многообразия.

Схема доказательства (для операторов $D=$ либо Эйлер, либо сигнатура, либо Тодд на кэлеровом многообразии):

1. $\operatorname{ind} D = \int_M \operatorname{tr}_s k_t^D(x,x)dx$ — представление через суперслед.

2. $\lim_{t\to 0} \operatorname{tr}_s k_t^D(x,x)$ определяется коэффициентами оператора в окрестности точки x.

3. $\boxed{\begin{array}{c}\text{спин-структура}\\ \text{всегда есть локально}\end{array}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{локально имеем}\\ D = \not{D}_E\end{array}}$

4. пп.2 и 3 $\Rightarrow \lim_{t\to 0} \operatorname{tr}_s k_t^D(x,x) = \lim_{t\to 0} \operatorname{tr}_s k_t^{\not{D}_E}(x,x)$.

5. Интегрированием по многообразию получаем формулу индекса.

Индекс оператора Тодда почти-комплексного многообразия

Пусть M — почти-комплексное многообразие $\Rightarrow$

Оператор $D : \Lambda^{0,ev}(M) \longrightarrow \Lambda^{0,odd}(M)$; $\sigma(D) = \sigma(\overline{\partial} + \overline{\partial}^*)$

$$\boxed{\operatorname{ind} D = (2\pi i)^{-n} \int\limits_M \det\left(\frac{\Omega_+}{e^{\Omega_+} - 1}\right)} \qquad (**)$$

Схема доказательства формулы (**):

1) пусть $\boxed{\widetilde{\not{D}} : \Lambda^{0,*}(M) \longrightarrow \Lambda^{0,*}(M)}$ — оператор с тем же символом, что и D, но локально *равный* оператору Дирака с коэффициентами.

2) главные символы равны $\Rightarrow$ $\boxed{\operatorname{ind} D = \operatorname{ind} \widetilde{\not{D}}}$;

3) локальные методы дают для $\operatorname{ind} \widetilde{\not{D}}$ выражение (**).