Лекция 8. Кэлеровы многообразия. Когомологические формулы индекса

I.1. Оператор Тодда как оператор Дирака с коэффициентами

M — комплексное многообразие $\Rightarrow$ определен оператор

$$\begin{aligned}\overline{\partial} : \Lambda^{0,*}(M) &\longrightarrow \Lambda^{0,*+1}(M)\\ \overline{\partial}(f d\overline{z}_{i_1} \wedge d\overline{z}_{i_2} \wedge \dots) &:= \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j} d\overline{z}_j \wedge d\overline{z}_{i_1} \wedge d\overline{z}_{i_2} \wedge \dots\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ *Оператор Тодда* $\boxed{\overline{\partial} + \overline{\partial}^* : \Lambda^{0,ev}(M) \longrightarrow \Lambda^{0,odd}(M)}$ (эллипт.оператор)

Основной результат:

Теорема

$\boxed{\text{$M$ — кэлерово многообразие со спинорной структурой}} \Rightarrow \boxed{\boxed{\sqrt{2}(\overline{\partial} + \overline{\partial}^*) = D\!\!\!\!/ \otimes \sqrt{\Lambda^{0,n}(M)}}}$

M вещественной размерности $2n$.

<u>План изложения:</u> 1) кэлеровость; 2) спин-структура и $\sqrt{\Lambda^{0,n}(M)}$; 3) почему операторы совпадают?

Подробнее можно прочитать в Гриффитс-Харрис, Gilkey, Berline Getzler Vergne, лекции A.Moroianu (2003)...

A. Кэлеровы многообразия

TM — комплексное расслоение, оператор $J : TM \to TM$, $J^2 = -1$

$\boxed{\begin{array}{c}\text{эрмитова метрика } h \text{ на } TM\\ h = h_{j\overline{k}} dz^j d\overline{z}^k\end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{риманова метрика } g \text{ на } TM\\ \text{согласов.с компл. структ}(J^*J = 1)\end{array}}$

$\Downarrow$

$g = \operatorname{Re} h(x, y)$ — риманова метрика

$\Omega = \operatorname{Im} h(x, y)$ — кососимметр. 2-форма *Кэлерова форма* $\Rightarrow \boxed{\Omega = \frac{i}{2} h_{j\overline{k}} dz^j \wedge d\overline{z}^k}$

$\boxed{\begin{array}{c}\text{Инфинитезимальное условие согласования}\\ \text{метрики и комплексной структуры}\end{array}}$

— условие Кэлера.

Определение-Теорема Следующие условия эквивалентны

1) M — *кэлерово многообразие*;

2) $\boxed{\begin{array}{c}\text{параллельный перенос векторов}\\ \text{— унитарное преобразование}\end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\nabla J = 0}$

3) $\boxed{\begin{array}{c}\text{кэлерова форма замкнута:}\\ d\Omega = 0\end{array}}$

4) локально существует веществ. функция H — *кэлеров потенциал*, что

$$h_{\alpha\overline{\beta}} = \frac{\partial^2 H}{\partial z_\alpha \partial \overline{z}_\beta}$$

5) $\boxed{\begin{array}{c}\text{существуют комплексные}\\ \textit{нормальные координаты}\end{array}}$ т.е. $\boxed{\begin{array}{c}\text{координаты } z_1, \ldots, z_n\text{:}\\ g_{jk} = \delta_{jk} + O(|z|^2)\end{array}}$

6) $\boxed{\begin{array}{ccc} 2(\overline{\partial} + \overline{\partial}^*)^2 & = & \Delta \\ \text{комплексн. Лапласиан} & & \text{веществ. Лапласиан}\end{array}}$

Комментарии

1. Кэлеровость обычно определяют как в п.3.

2. Далее мы используем п.5. Координаты строятся (см. Гилки) методом неопределенных коэффициентов:

Пусть некоторые координаты $z_1, \ldots, z_n$ ортогональны в нуле.

$\boxed{\begin{array}{c}\text{замена координат}\\ z'_j = z_j + c^j_{kl} z_k z_l\end{array}} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{формула для коэффициентов}\\ c^j_{kl} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial h_{k\overline{j}}}{\partial z^l}\end{array}}$

Примеры. 1) $M = \mathbb{C}^n$, $H = \frac{1}{2}|z|^2 \Rightarrow$

$$h = \sum |dz^j|^2 \text{ — кэлерова метрика.}$$

2) $M = \mathbb{CP}^n$, $H = \ln(1 + |w|^2)$ (в однородных координатах) $\Rightarrow$ *метрика Фубини–Штуди.* ($\mathbb{U}(n+1)$-инвариантная)

B. Спинорная структура на компл.многообразии.

(напомин.) **Утв.** $\boxed{\text{спин-структура на } M \text{ — комплексном}} \Leftrightarrow \boxed{\text{задание расслоения } E\text{: } E \otimes E \simeq \Lambda^{0,n}(M)}$

Док-во опиралось на диаграмму:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{U}(n) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "i\times\det"'] & \mathbf{Spin}(2n) \times \mathbb{U}(1)/(-1,-1) \arrow[d, "\rho\times\lambda^2"] \\ & \mathbf{SO}(2n) \times \mathbb{U}(1) \end{tikzcd}$$

($\rho \times \lambda^2$ — двулистное накрытие). Пусть $a \in \mathbb{U}(n)$ фиксирован, тогда

$\boxed{\text{выбор элемента } x \in \mathbf{Spin}(2n) \text{ такого что } \rho(x) = i(a)}$ эквивалентен $\Leftrightarrow$ $\boxed{\text{выбору } \sqrt{\det a}}$

т.е. $\boxed{\text{выбор спин.расслоения } \mathcal{S}} \Leftrightarrow \boxed{\text{выбор } \sqrt{\Lambda^{0,n}(M)}}$

C. Доказательство теоремы об операторах Тодда и Дирака

1. Операторы в плоском пространстве — координаты $z = x + iy$; двойств.импульсы $w = \xi + i\eta$

$\overline{\partial} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}} d\overline{z} \wedge \Rightarrow \sigma\left(\overline{\partial}\right) = \dfrac{i}{2} w d\overline{z} \wedge$ — получаем главный символ

$$\boxed{\sigma(\overline{\partial} + \overline{\partial}^*)(w) = \frac{i}{2}(w d\overline{z} \wedge - \overline{w} dz \lrcorner)} =: \frac{i}{\sqrt{2}} c(w)$$

$\Rightarrow c^2(w) = -|w|^2 \Rightarrow \boxed{c : \mathbb{C}\mathrm{l}(\mathbb{R}^{2n}) \simeq \mathrm{End}(\Lambda^{0,*}(\mathbb{C}^n)) \text{ — спинорное представление}}$

2. Установим изоморфизм расслоений: $\Lambda^{0,*}(M) \simeq \mathcal{S} \otimes \sqrt{\Lambda^{0,n}(M)}$

Оба склеиваются из $\Lambda^*(\mathbb{C}^n)$

Пусть U — функция перехода для TM (унитарная).

$\Rightarrow$ функции перехода для $\Lambda^{0,*}(M)$ есть $\alpha(U)$

функц. перехода для $\mathcal{S} \otimes \sqrt{\Lambda^{0,n}(M)}$ есть $\dfrac{\alpha(U)}{\sqrt{\det U}} \cdot \sqrt{\det U} = \alpha(U)$

3. Равенство операторов $\sqrt{2}(\overline{\partial} + \overline{\partial}^*)$ и $\not{D} \otimes \sqrt{\Lambda^{0,n}(M)}$.

Возьмем произвольную точку $x \in M$. Тогда у операторов

• члены первого порядка равны (т.к. опр-ся клифф. умножением)

• члены нулевого порядка определяются метрикой и ее первыми производными. В нормальных координатах члены нулевого порядка в точке x нулевые, так как метрика с точностью до $O(r^2)$ — евклидова.

$\Rightarrow$ коэффициенты операторов в точке x совпадают. $\square$

Характеристические классы и когомологические формулы индекса

Вопрос: $\boxed{\text{Почему интегралы в наших формулах не зависят от выбора метрик и связностей?}}$

Ответ: Рассматриваемые формы определяют классы в когомологиях.

II.1. Классы в когомологиях.

Дифференциальные формы $\operatorname{tr} F^k$, где $F = (\nabla^E)^2$ — кривизна.

Лемма.

1. замкнутость: $d \operatorname{tr} \nabla^{2k} = 0$; 2. гомотопия: $\operatorname{tr} \nabla_1^{2k} - \operatorname{tr} \nabla_0^{2k} = d\alpha$ ∇_j — разные связности	$\Rightarrow$	когомологический класс $\operatorname{tr} \nabla^{2k} \in H^{2k}(M, \mathbb{C})$ не зависит от связности

Док-во. Локально $\nabla = d + \omega$, $F = (d+\omega)^2 = d\omega + \omega \wedge \omega \Rightarrow$

$\boxed{\text{тождество Бьянки: } dF = [F, \omega]}$

1. $d \operatorname{tr} F^k = k \operatorname{tr} dF F^{k-1} = k \operatorname{tr}[F, \omega] F^{k-1} = k \operatorname{tr}[F^k, \omega] = 0.$

2. Пусть $\nabla_t = d + \omega + t\omega_0$

$$\frac{d}{dt} \operatorname{tr} F^k = k \operatorname{tr} \underbrace{\dot{F}}_{d\omega_0 + \omega\wedge\omega_0 + \omega_0 \wedge \omega} F^{k-1} = kd(\operatorname{tr} \omega_0 F^{k-1}) =$$

$$= kd\left(\operatorname{tr} \frac{d}{dt}(\nabla_t) F^{k-1}\right)$$

□

Следствие 1. *Формула трансгрессии*:

$$\boxed{\operatorname{tr} \nabla_1^{2k} - \operatorname{tr} \nabla_0^{2k} = d\left(k \int_0^1 \operatorname{tr}\left(\frac{d\nabla_t}{dt} \nabla_t^{2k-2}\right) dt\right)}$$

Следствие 2. Ряд $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots \Rightarrow$ классы

$\operatorname{tr} f(F(E)) \in H^{ev}(M)$ — *аддитивный класс* $\operatorname{tr} f(E \oplus E') = \operatorname{tr} f(E) + \operatorname{tr} f(E')$	$\det f(F(E)) \in H^{ev}(M)$ — *мультипликативный класс* $\det f(E \oplus E') = \det f(E) \det f(E')$

Примеры. Класс Черна и характер Черна компл.расслоений

Пусть E — комплексное расслоение.

Опр.

$$\boxed{\textit{Класс Черна } c(E) = \det\left(1 - \frac{F(E)}{2\pi i}\right) = 1 - \tfrac{1}{2\pi i}\operatorname{tr} F - \tfrac{1}{2}\dots}$$

— мультипликативный класс; $c = c_0 + c_1 + c_2 + \dots$

$c(E)$ называют *полным классом Черна*, а $c_j(E)$ — *классами Черна.*

$$\boxed{\textit{Характер Черна } \operatorname{ch}(E) = \operatorname{tr}\exp\left(-\tfrac{F(E)}{2\pi i}\right)}$$

— аддитивен и мультипликативен (относительно произведения $\otimes$):

$$\operatorname{ch} E + \operatorname{ch} E' = \operatorname{ch}(E \oplus E'), \quad \operatorname{ch}(E \otimes E') = \operatorname{ch} E \operatorname{ch} E'$$

Упражнение. Докажите мультипликативность характера Черна.

Пусть ω — матрица с комплексными коэффициентами. Тогда

$\det(1+\omega) = \prod(1+\lambda_i)$ — произведение по собств. значениям.

На этом языке получаем:

• классы Черна $c_j \in H^{2j}$ — элементарные симм.функции от λ_j;

• компоненты характера Черна — суммы степеней: $\sum \lambda_j^k/k!$;

• одни через другие выражаются полиномиальным образом (следует из того, что $\det(1+\omega) = P(\operatorname{tr}\omega, \operatorname{tr}\omega^2, \dots)$);

• Все аддитивные и мультипликативные классы — полиномы от классов Черна;

II.2. Классы Черна в топологии:

Известно, что $c(E) = 1 + c_1(E) + \ldots \in H^{ev}(M, \mathbb{Z})$ однозначно определяется условиями

1) (формула Уитни) $c(E \oplus E') = c(E)c(E')$
2) (естественность) если $f: X \to Y \Rightarrow c(f^*E) = f^*c(E)$
3) $c(\gamma) = 1 + g$, где γ — линейное расслоение на $\mathbb{CP}^1$
$g \in H^2(\mathbb{CP}^1) \simeq \mathbb{Z}$ — образующая.

Для $c(E)$ определяемого через связности можно проверить 1)-3)

$\Rightarrow$ получаем $\boxed{\textbf{целочисленность класса Черна } c(E)}$

II.3. Случай вещественных расслоений

Опр. *Класс Понтрягина вещественного расслоения* $p(E) \in H^{4*}(M)$

$$\boxed{p(E) = \det{}^{1/2}\left(1 - \frac{F^2(E)}{4\pi^2}\right)}$$

Мотивировка: если ω — кососимметрическая матрица с собственными значениями $\pm i\lambda_j \Rightarrow$

$$\det{}^{1/2}(1-\omega^2) = \prod(1+\lambda_j^2)$$

Упражнения:

1) $p_j(E) = (-1)^j c_{2j}(E \otimes \mathbb{C}) \qquad (c_{2j+1}(E \times \mathbb{C}) = 0).$

2) классы для веществ.расслоений есть полиномы от классов Понтрягина.

II.3. Применение: когомологические формулы индекса

$$\boxed{\text{ind(оператора Дирака)}_E = \int\limits_M A(M)\,\mathrm{ch}\,E}$$

$$\text{ind(оператора Хирцебруха)} = \int\limits_M L(M)$$

$$\boxed{\text{ind(оператора Тодда)}_E = \int\limits_M \mathrm{Td}(M)\,\mathrm{ch}\,E}$$

где

$$A(x) = \frac{x/2}{\mathrm{sh}\,x/2}; \quad L(x) = \frac{x}{\mathrm{th}\,x/2}; \quad Td(x) = \frac{x}{1-e^{-x}}$$

здесь для вещественных многообразий :$f(M) := \det^{1/2} f\,(\Omega)$;

для комплексных — $f(M) := \det f\,(\Omega)$

Ω — форма кривизны многообразия.