Для зачета по каждому листку достаточно сдать все задачи со звездочками, либо все задачи без звездочек. Задачи с двумя звездочками можно не сдавать. Сдавшим $k$ задач с двумя звездочками разрешается не сдавать $2k$ задач со звездочками из того же листочка. Задачи, обозначенные (!), следует сдавать всем.

# Геометрия 12: фундаментальная группа и гомотопии

## Гомотопии

Все топологические пространства в этом листочке предполагаются локально линейно связными и хаусдорфовыми, если не оговорено противного.

**Определение 12.1.** Пусть $f_1, f_2 : X \longrightarrow Y$ – непрерывные отображения топологических пространств. Напомним, что **гомотопией** между $f_1$ и $f_2$ называется такое непрерывное отображение $F : [0,1] \times X \longrightarrow Y$, что $F\Big|_{\{0\}\times X}$ равно $f_1$, а $F\Big|_{\{1\}\times X}$ равно $f_2$.

**Задача 12.1.** Докажите, что гомотопные отображения индуцируют один и тот же гомоморфизм $\pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(Y)$.

**Определение 12.2.** Пусть $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow X$ – непрерывные отображения топологических пространств, причем $f \circ g$ и $g \circ f$ гомотопны тождественным отображениям из $X$ в $X$ и из $Y$ в $Y$. Такие отображения называются **гомотопическими эквивалентностями**, а $X$ и $Y$ – **гомотопически эквивалентными**.

**Задача 12.2.** Докажите, что композиция гомотопических эквивалентностей отображений есть гомотопическая эквивалентность. Докажите, что гомотопическая эквивалентность пространств есть отношение эквивалентности.

**Задача 12.3 (!).** Пусть $f : X \longrightarrow Y$ – гомотопическая эквивалентность. Докажите, что $f$ индуцирует изоморфизм фундаментальных групп.

**Задача 12.4.** Пусть $X \subset Y$ – ретракт. Докажите, что $X$ и $Y$ гомотопически эквивалентны.

**Задача 12.5 (!).** Пусть $X$ – топологическое пространство. Докажите, что $X$ стягиваемо тогда и только тогда, когда оно гомотопически эквивалентно точке.

**Задача 12.6 (!).** Дан связный граф $\Gamma$, у которого $n$ ребер и $n$ вершин. Докажите, что его топологическое пространство гомотопически эквивалентно окружности.

**Задача 12.7 (!).** Пусть $M$ – связное топологическое пространство, $x, x', y, y' \in M$ – любые точки. Докажите, что пространства путей $\Omega(M, x, x')$ и $\Omega(M, y, y')$ гомотопически эквивалентны.

**Указание.** Выберите путь $\gamma_{xy}$, соединяющий $x$ и $y$ и путь $\gamma_{x'y'}$, соединяющий $x'$ и $y'$. Пусть $\gamma_{xy}^{-1}(t) = \gamma_{xy}(1-t)$ и $\gamma_{x'y'}^{-1}(t) = \gamma_{x'y'}(1-t)$. Рассмотрим отображение $f : \Omega(M, x, x') \longrightarrow \Omega(M, y, y')$ переводящее любой путь $\gamma \in \Omega(M, x, x')$ в композицию $\gamma_{xy}^{-1}\gamma\gamma_{x'y'}$, и аналогичное отображение $g : \Omega(M, y, y') \longrightarrow \Omega(M, x, x')$, переводящее $\gamma \in \Omega(M, y, y')$ в $\gamma_{xy}\gamma\gamma_{x'y'}^{-1}$. Докажите, что $fg$ гомотопно тождественному и $gf$ гомотопно тождественному.

## Пространство путей на локально стягиваемых пространствах

**Определение 12.3.** Пусть $M$ – топологическое пространство. $M$ называется **локально стягиваемым**, если у каждой точки есть стягиваемая окрестность.

**Задача 12.8.** Пусть $M$ – локально стягиваемое топологическое пространство. Докажите, что $M$ локально линейно связно.

**Задача 12.9 (*).** Пусть $M$ – такое геодезически связное метрическое пространство, что для какого-то $\delta > 0$ любые две точки, отстоящие на расстояние $< \delta$, соединяются единственной геодезической. Докажите, что $M$ локально стягиваемо.

**Задача 12.10.** Докажите, что любой граф локально стягиваем.

**Определение 12.4.** Топологическое пространство $M$ называется **многообразием размерности** $n$, если у любой точки найдется окрестность, гомеоморфная открытому шару в $\mathbb{R}^n$.

**Замечание.** Многообразия, очевидно, локально стягиваемы.

**Задача 12.11 (!).** Докажите, что сфера $S^n$ – это многообразие.

**Указание.** Воспользуйтесь стереографической проекцией.

**Задача 12.12.** Пусть $M$ стягиваемое, $x, y \in M$. Докажите, что все пути $\gamma \in \Omega(M, x, y)$ гомотопны.

**Задача 12.13 (!).** Пусть $\gamma \in \Omega(M, x, y)$ – путь в локально стягиваемом пространстве $M$, а $\{U_\alpha\}$ – множество стягиваемых открытых множеств на $M$. Выберем в $\{U_\alpha\}$ конечное подмножество, покрывающее $\gamma$ (это можно сделать, потому что $\gamma$ компактен). Пусть $V_1, \dots, V_n$ – соответствующее покрытие $[0, 1]$ связными интервалами, где каждый $V_i$ является связной компонентой $\gamma^{-1}(U_i)$, а все $U_i$ стягиваемы. Упорядочим $V_i$ таким образом, что $V_i$ и $V_{i+1}$ пересекаются в точке $t_i$, и пусть $a_i := \gamma(t_i)$. Докажите, что любой путь $\gamma' \in \Omega(M, x, y)$, такой, что $\gamma'(t_i) = a_i$, и $\gamma'([t_i, t_{i+1}]) \subset U_i$, гомотопен $\gamma$.

**Указание.** Воспользуйтесь предыдущей задачей.

**Задача 12.14 (!).** Пусть $M$ – локально стягиваемое топологическое пространство, а $\gamma \in \Omega(M, x, y)$ – некоторый путь. Докажите, что у $\gamma$ найдется такая окрестность $\mathcal{U} \subset \Omega(M, x, y)$, что все $\gamma' \in \mathcal{U}$ гомотопны.

**Указание.** Воспользуйтесь предыдущей задачей.

**Замечание.** Заметим, что на компактных многообразиях размерности $> 1$ существует петли, задаваемые сюръективным отображением; пример такой петли легко построить тем же методом, что кривую Пеано.

**Задача 12.15 (!).** Пусть $M$ это многообразие (например, сфера) размерности больше 1, а $\gamma \in \Omega(M, x)$ – петля. Докажите, что $\gamma$ гомотопна петле, которая не сюръективна.

**Указание.** Воспользуйтесь предыдущей задачей.

**Задача 12.16 (!).** Пусть $n > 1$. Докажите, что $n$-мерная сфера односвязна.

**Указание.** Пусть $\gamma$ – петля на сфере. Воспользовавшись предыдущей задачей, прогомотопируйте $\gamma$ в петлю, которая отображает $[0,1]$ в $S^n \backslash \{x\}$, где $x$ некоторая точка. Докажите, что сфера без точки гомеоморфна $\mathbb{R}^n$, в частности стягиваема.

**Задача 12.17 (*).** Пусть $M$ стягиваемо, а $F: M \times [0,1] \longrightarrow M$ – гомотопия тождественного отображения в постоянное отображение $M \to y \in M$. Рассмотрим следующее отображение $M \longrightarrow \Omega(M, y, *)$, $t, m \longrightarrow F(m,t)$ ($t \in [0,1]$, $m \in M$). Докажите, что оно непрерывно.

**Задача 12.18.** Пусть $M$ локально стягиваемо, $x, y \in M$ – две точки, $\gamma \in \Omega(M, x, y)$ – некоторый путь. Докажите, что у $\gamma$ есть такая окрестность $\mathcal{U} \in \Omega(M, x, *)$, что все пути $\gamma' \in \mathcal{U}$, соединяющие $x$ и $a$, гомотопны в $\Omega(M, x, a)$.

**Задача 12.19 (*).** Пусть $M$ – локально стягиваемое топологическое пространство, $x \in M$ – точка, а $\Omega(M, x, *)$ – множество всех путей, начинающихся в точке $x$, снабженное открыто-компактной топологией. Рассмотрим такое отношение эквивалентности на $\Omega(M, x, *)$: $\gamma \sim \gamma'$, если $\gamma$ и $\gamma'$ соединяют $x$ и $y$, и гомотопны в $\Omega(M, x, y)$. Рассмотрим $\Omega(M, x, *)/\sim$, с топологией фактора. Выберем стягиваемую окрестность $U_y \ni y$, и пусть $U_y \stackrel{F}{\longrightarrow} \Omega(U_y, y, *)$ – отображение, построенное в задаче 12.17. Пусть $\gamma \in \Omega(M, x, y)$ – некоторый путь, а $U_y \stackrel{\Psi}{\longrightarrow} \Omega(M, x, *)$ – отображение, ставящее $a \in U_y$ путь $\gamma F(a)$ (то есть путь, заданный на $[0, 1/2]$ как $t \longrightarrow \gamma(2t)$, и на $[1/2, 1]$ как $F(a, 2t-1)$. Докажите, что (для достаточно маленького $U_y$) $\Psi$ в композиции с $\Omega(M, x, *) \stackrel{\pi}{\longrightarrow} \Omega(M, x, *)/\sim$ – это гомеоморфизм $U_y$ на некоторое открытое подмножество в $\Omega(M, x, *)/\sim$.

**Указание.** Непрерывность $\Psi \circ \pi$ очевидна по конструкции, а инъективность следует из предыдущей задачи. Чтобы убедиться, что $\Psi \circ \pi$ задает гомеоморфизм $U_y$ на $\Psi \circ \pi(U_y)$, нам нужно доказать, что $\Psi \circ \pi$ переводит открытые множества в открытые. Это ясно из того, что естественное отображение $\Omega(M, x, *)/\sim \longrightarrow M$, $\gamma' \longrightarrow \gamma'(1)$, непрерывно, и индуцирует гомеоморфизм $U_y$ на образ.

**Задача 12.20 (*).** Рассмотрим отображение $\Omega(M, x, *)/\sim \longrightarrow M$, ставящее в соответствие пути $\gamma \in \Omega(M, x, y)$ точку $y = \gamma(1)$. Докажите, что это накрытие.

**Указание.** Воспользуйтесь предыдущей задачей.

**Задача 12.21 (!).** Докажите, что $\Omega(M, x, *)$ стягиваемо.

**Задача 12.22 (*).** Пусть $\gamma$ – путь в $\Omega(M, x, *)/\sim$. Докажите, что $\gamma$ гомотопен образу некоторого пути из $\Omega(M, x, *)$.

**Указание.** Докажите, что $\gamma$ можно поднять до пути в $\Omega(M, x, *)$ локально, и воспользуйтесь тем, что для каждой точки в $\Omega(M, x, *)/\sim$ ее прообраз в $\Omega(M, x, *)$ связен.

**Задача 12.23 (*).** Выведите из этого, что $\Omega(M, x, *)/\sim$ односвязно.

**Замечание.** Пусть $(M, x)$ – локально стягиваемое топологическое пространство с отмеченной точкой. Универсальное накрытие $M$ можно таким образом отождествить с множеством пар ($y \in M$, класс гомотопии путей $\gamma \in \Omega(M, x, y)$).

## Свободная группа и букет

**Определение 12.5.** Пусть $(M_1, x_1)$, $(M_2, x_2)$, $(M_3, x_3)$, ... – набор (возможно, бесконечный) связных топологических пространств с отмеченной точкой. Рассмотрим факторпространство несвязного объединения всех $(M_\alpha, x_\alpha)$ по соотношению эквивалентности $\{x_1\} \sim \{x_2\} \sim \{x_3\} \sim \ldots$ Это факторпространство называется **букетом**, обозначается $\bigvee_\alpha (M_\alpha, x_\alpha)$. Также букет обозначается $(M_1, x_1) \vee (M_2, x_2) \vee (M_3, x_3) \vee \ldots$

**Задача 12.24.** Пусть все $M_\alpha$ связные (линейно связные, хаусдофовы). Докажите, что их букет связен (линейно связен, хаусдорфов).

**Задача 12.25 (!).** Пусть все $M_\alpha$ связные и односвязные. Докажите, что их букет односвязен.

**Задача 12.26 (!).** Пусть $\Gamma$ – связный граф, у которого $n$ вершин и $n + k - 1$ ребер. Докажите, что его топологическое пространство $M_\Gamma$ гомотопически эквивалентно букету $k$ окружностей.

**Указание.** Пусть у $\Gamma$ есть ребро $r$, соединяющее две разные вершины $v_1, v_2$, Рассмотрим граф $\Gamma'$, у которого $n - 1$ вершин и $n + k - 2$ ребер, полученный из $\Gamma$ следующим образом. Из $\Gamma$ выкидывается ребро $r$, а вершины $v_1$ и $v_2$ склеиваются в одну. Докажите, что $M_\Gamma$ и $M_{\Gamma'}$ гомотопически эквивалентны.

**Определение 12.6.** Зададим множество $\{a_1, a_2, \ldots\}$ мощности $N$ ($N$ может быть как конечным кардиналом, так и бесконечным). **$N$-арное дерево** $D_N$ – это бесконечный граф, который определяется следующим образом. Вершины $D_N$ – конечные последовательности из символов $a_i$. Ребрами соединяются вершины, соответствующие $A_1 A_2 \ldots A_k$ и $A_1 A_2 \ldots A_k A_{k+1}$ (все $A_i$ принадлежат $\{a_1, a_2, \ldots\}$).

**Задача 12.27.** Докажите, что в каждую вершину $D_N$ входят $N + 1$ ребер.

**Задача 12.28 (!).** Пусть $M_N$ – топологическое пространство $N$-арного дерева, с естественной метрикой, построенной в начале этого листка. Докажите, что $M_N$ является звездчатым (любые две точки соединяются единственной геодезической). Докажите, что оно стягиваемо.

**Задача 12.29 (!).** Рассмотрим $2N-1$-арное дерево. Раскрасим его ребра в $N$ цветов, таким образом, что к каждой вершине сходится по 2 ребра каждого цвета. Рассмотрим букет из $N$ окружностей, и раскрасим каждую из окружностей в свой цвет. Рассмотрим отображение из $M_{2N-1}$ в букет из $N$ окружностей, переводящий вершины графа в вершины букета, а ребро цвета $a_i$ в окружность такого же света. Докажите, что это универсальное накрытие.

**Задача 12.30.** Пусть $\{a_1, a_2, \ldots\}$ – множество мощности $N$, а $\mathcal{W}$ – множество конечных последовательностей ("слов") из символов $a_i$, $a_j^{-1}$, в которых нигде не встречаются подряд $a_i a_i^{-1}$, а также $a_i^{-1} a_i$. Последовательность длины 0 обозначается $e$. Мы умножаем слова, записывая одно за другим и зачеркивая последовательно все $a_i a_i^{-1}$, $a_i^{-1} a_i$, которые встречаются подряд. Докажите, что $\mathcal{W}$ образует группу.

**Определение 12.7.** Эта группа называется **свободной группой, порожденной образующими** $\{a_1, a_2, \ldots\}$, обозначается $F_N$.

**Задача 12.31.** Докажите, что $F_1$ изоморфно $\mathbb{Z}$.

**Задача 12.32 (!).** Пусть $G$ – любая группа, а $\{g_1, g_2, \dots\}$ – набор элементов из $G$, пронумерованный $\{a_1, a_2, \dots\}$. Докажите, что существует единственный гомоморфизм $F_N \longrightarrow G$, переводящий $a_i$ в $g_i$.

**Задача 12.33 (!).** Постройте свободное действие $F_N$ на топологическом пространстве $M_{2N-1}$ $2N-1$-арного дерева, транзитивное на вершинах.

**Задача 12.34 (!).** Докажите, что $M_{2N-1}/F_N$ – букет $N$ окружностей, а фундаментальная группа букета свободна.

**Задача 12.35 (!).** Докажите, что любой (возможно, бесконечный) граф гомотопически эквивалентен букету окружностей.

**Задача 12.36 (!).** Выведите из этого, что любая подгруппа свободной группы свободна.

**Указание.** Воспользуйтесь теорией Галуа для накрытий.

**Задача 12.37 (*).** Пусть $G_1, G_2, \dots$ – какой-то набор групп. Рассмотрим множество $\mathcal{W}$ конечных последовательностей неединичных элементов из разных $G_i$, таких, что элементы одной и той же группы нигде не идут подряд. Если дана любая последовательность $A$ элементов из $G_i$, из нее можно получить элемент $\mathcal{W}$ следующим способом. Если в $A$ идут подряд два элемента из $G_i$, мы их перемножаем и заменяем эти два элемента на произведение. Если в $A$ встречается единица одних из групп, мы ее вычеркиваем. Повторим эту процедуру столько раз, сколько нужно, чтобы получить элемент из $\mathcal{W}$. Элементы $\mathcal{W}$ можно перемножать, записав одно слово после другого и применив вышеописанную процедуру. Докажите, что получится группа.

**Определение 12.8.** Эта группа называется **свободным произведением групп** $G_1$, $G_2$, ....

**Задача 12.38.** Докажите, что свободная группа от $N$ образующих – это свободное произведение $N$ копий $\mathbb{Z}$.

**Задача 12.39.** Докажите, что свободное произведение свободных групп свободно.

**Задача 12.40 (*).** Пусть $(M_1, x_1), (M_2, x_2), (M_3, x_3), \dots$ – набор связных топологических пространств с отмеченной точкой. Докажите, что $\pi_1(\bigvee_\alpha (M_\alpha, x_\alpha))$ изоморфна свободному произведению групп $\pi_1(M_1, x_1), \pi_1(M_2, x_2), \pi_1(M_3, x_3), \dots$.