НМУ, спецкурс "эквивариантные когомологии и теорема о локализации". Экзамен, январь 2005.

Задача 1. Пусть M — компактное G-многообразие, X — замкнутое G-подмногообразие. Обозначим через $\Omega_G(M-X)_c$ комплекс эквивариантных форм с компактным носителем на $M-X$. Доказать, что существует длинная точная последовательность

$$\ldots \longrightarrow H^k_G(M-X)_c \longrightarrow H^k_G(M) \longrightarrow H^k_G(X) \longrightarrow H^{k+1}_G(M-X)_c \longrightarrow \ldots$$

Задача 2. Пусть M является G-многообразием, а U_1 и U_2 два его G-инвариантных открытых подмножества. Доказать, что существуют длинные точные последовательности

$$\ldots \longrightarrow H^{k-1}_G(U_1 \cap U_2) \longrightarrow H^k_G(U_1 \cup U_2) \longrightarrow H^k_G(U_1) \oplus H^k_G(U_2) \longrightarrow \ldots$$

$$\ldots \longrightarrow H^k_G(U_1)_c \oplus H^k_G(U_2)_c \longrightarrow H^k_G(U_1 \cup U_2)_c \longrightarrow H^{k+1}_G(U_1 \cap U_2)_c \longrightarrow \ldots$$

Вычислить с их помощью $H_{S^1}(S^2)$.

Задача 3. Будем называть многообразие эквивариантно формальным, если спектральная последовательность обрывается на E_1 шаге, то есть $H_G(M) = H(M) \otimes S(\mathfrak{g}^*)^G$ как (свободный) $S(\mathfrak{g}^*)^G$-модуль.

а) Доказать, что в этих условиях

$$H(M) = H_G(M) \otimes_{S(\mathfrak{g}^*)^G} \mathbb{C},$$

где $\mathbb{C}$ — тривиальный $S(\mathfrak{g}^*)^G$-модуль.

б) Доказать, что в этих условиях если $K \subset G$, то

$$H^*_K(M) \cong S(\mathfrak{k}^*)^K \otimes_{S(\mathfrak{g}^*)^G} H^*_G(M).$$

в) Пусть M и N эквивариантно формальны. Вывести формулу Кюннета

$$H^*_G(M \times N) = H^*_G(M) \otimes_{S(\mathfrak{g}^*)^G} H^*_G(N).$$

г*) Доказать, что спаривание

$$H^i_G(M) \times H^j_G(M) \longrightarrow S^{\frac{i+j-n}{2}}(\mathfrak{g}^*)^G$$

невырождено.

д*) Пусть h_i — образующие свободного модуля $H^*_G(M)$. Пусть $\langle , \rangle$ означает спаривание из предыдущего пункта. Ясно, что $\det ||\langle h_i, h_j\rangle|| \in S(\mathfrak{g}^*)^G$. Доказать, что на самом деле $\det ||\langle h_i, h_j\rangle|| \in \mathbb{C} \subset S(\mathfrak{g}^*)^G$.

Задача 4. Пусть G связная компактная группа Ли, $T \subset G$ максимальный тор и $\mathfrak{W}$ группа Вейля. Доказать, что для G^*-модуля A верно, что

$$H_G(A) \otimes_{S(\mathfrak{t}^*)^{\mathfrak{W}}} S(\mathfrak{t}^*) \cong H_T(A).$$

Задача 5. Мы ввели гомоморфизм Чженя-Вейля разными способами:

1. Если A является G^*-алгеброй типа (C), то мы отображаем W в A посылая элементы связности $\theta^a \in W$ в элементы связности $\theta^a_A \in A$:

$$\rho : W \longrightarrow A, \quad \rho(\theta^a) = \theta^a_A,$$

что индуцирует отображение $S(\mathfrak{g}^*)^G \longrightarrow H_{\mathrm{bas}}(A)$.

2. Отображение тривиального G^*-модуля $\mathbb{C}$ в G^*-алгебру с единицей A индуцирует гомоморфизм $S(\mathfrak{g}^*)^G \longrightarrow H_{\mathrm{bas}}(A)$.

3. Мы также определяли гомоморфизм Чженя-Вейля как компоненту младшей размерности в отображении Картана.

Доказать, что все эти определения дают одно и то же в тех случаях, когда одновременно несколько из них имеют смысл.

Задача 6. Описать эквивариантные замкнутые 2-формы на G/K в терминах коприсоединенных орбит и стандартных эквивариантных симплектических форм на них. Выяснить, когда эти формы на G/K эквивариантные симплектические.