9.09.2004

Геометрия. Листок 1.

I. Метрическое пространство

Множество X вместе с метрикой d называется *метрическим пространством.*
Метрика d сопоставляет паре точек (x, y) из X вещественное число $d(x, y)$, которое называется расстоянием и удовлетворяет трем условиям:
- $d(x, y) \geq 0$ и $d(x, y) = 0$, если и только если $x = y$
- $d(x, y) = d(y, x)$
- неравенство треугольника $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ для любых x, y, z из X

В следующих задачах необходимо проверить, что (X, d) — метрическое пространство.

Задача 1. X — любое множество, а расстояние определяется так: $d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$.

Задача 2. X — коллекция всех подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n\}$. Если x и y — два таких подмножества, то определим $d(x, y)$ как число элементов в x, не входящих в y, плюс число элементов в y, не входящих в x (пример $d(\{1, 2\}, \{2, 5, 6\}) = 3$).

Задача 3. X — декартова плоскость $\mathbb{R}^2$, а расстояние между её точками $a = (x, y)$ и $a' = (x', y')$ находится по формуле $d(a, a') = (|x - x'|^\alpha + |y - y'|^\alpha)^{1/\alpha}$, $\alpha > 0$. Разобрать два случая $\alpha =$1, 2.

Задача 4. $\mathrm{X} = \mathbb{R}^2$, а $d(a, a') = \max(|x - x'|, |y - y'|)$.

II. Бисекторы и сферы

Бисектор $\mathrm{Bi}(x, y)$ — это геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных точек x и y из X.
Окружность $S(x, R)$ — это геометрическое место точек, удаленных от данной точки x на расстояние R.

Задача 5. Нарисуйте окружность $S((0, 0), 1)$ и бисектор $\mathrm{Bi}((0, 0), (1, 1))$ в метрических пространствах из задач 3 и 4.

III. Длина кривой, отрезок, геодезическая

Пусть (X, d) — метрическое пространство и $\gamma : [a, b] \to \mathrm{X}$ — непрерывная кривая в X. Длина кривой γ определяется как

$$l(\gamma) = \sup \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \ : \ \text{где } a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b \text{ — любое разбиение отрезка } [a, b] \right\}.$$

Итак, метрика позволяет найти длину кривой.
Но умея находить длины кривых, мы иной раз можем ввести новое расстояние между точками x и y из X, определив его как нижнюю грань длин всевозможных кривых, соединяющих эти точки.

Задача 6. Проверьте, что таким способом мы действительно определяем расстояние. Докажите, что новое расстояние не меньше исходного.

Метрическое пространство называется *хорошим*, если новое расстояние существует и совпадает с исходным.

Задача 7. Привести пример "плохого" пространства (X, d).

В дальнейшем мы будем иметь дело только с хорошими метрическими пространствами.

Непрерывная кривая в метрическом пространстве (X, d) называется *отрезком* $[x, y]$, если её длина равна расстоянию между её концами x и y. Непрерывная кривая называется геодезической, если её можно разбить на отрезки.

Задача 8. а) Докажите, что если точка z принадлежит отрезку $[x, y]$, то она разбивает его на два отрезка $[x, z]$ и $[z, y]$.
б) Нарисуйте отрезки и геодезические в пространствах (X, d) из задач 3 и 4.

Задача 9. Докажите, что в этих пространствах прямые линии являются геодезическими.

Задача 10*. Предположим, что метрика d на плоскости $\mathbb{R}^2$ обладает следующим свойством: любой параллельный перенос сохраняет расстояние между точками. Докажите, что в пространстве $(\mathbb{R}^2, d)$ прямые линии являются геодезическими.