Геометрия: листок 2. Проективная прямая (16.09.2004)

Задача 1. Пусть A_1, B_1, C_1, D_1 — точки прямой l_1. Докажите, что при проецировании прямой l_1 на прямую l_2 из некоторой точки O величина $\dfrac{C_1A_1}{C_1B_1} : \dfrac{D_1A_1}{D_1B_1}$ сохраняется.

Введём на прямой l координаты и будем вместо, например, CA брать $c-a$, где c и a — координаты точек C и A. Величину $\dfrac{c-a}{c-b} : \dfrac{d-a}{d-b}$ называют *двойным отношением* четырех точек и обозначают $[A, B, C, D]$.

Задача 2. Двойное отношение четырех точек равно λ. Какие значения может принимать двойное отношение тех же самых четырех точек, взятых в другом порядке?

Назовем преобразование прямой *проективным*, если оно сохраняет двойное отношение любых четырех точек.

Задача 3. Докажите, что любое преобразование прямой, которое можно представить в виде композиции нескольких проецирований, является проективным преобразованием.

Отображение вида $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$, где $ad \neq bc$, назовем *дробно-линейным.*

Задача 4. Докажите, что преобразование прямой проективно тогда и только тогда, когда оно дробно-линейно.

Дробно-линейное преобразование $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ не определено для точки $x = -d/c$. Чтобы избежать этой неприятности, добавим к прямой l точку ∞ следующим образом. Выберем точку O вне прямой l и сопоставим каждой точке $A \in l$ прямую OA. Тогда точке ∞ соответствует прямая, проходящая через точку O параллельно прямой l. Назовем *проективной прямой* множество всех прямых на плоскости, проходящих через фиксированную точку O.

Пусть O — начало системы координат на плоскости. Тогда точке проективной прямой (т.е. прямой, проходящей через точку O) можно сопоставить пару чисел (x, y) — координаты точки на этой прямой, причем пары (x, y) и $(\lambda x, \lambda y)$ считаются эквивалентными. Эту пару чисел назовем *однородными координатами* точки проективной прямой.

Задача 5. Докажите, что в однородных координатах проективное преобразование проективной прямой имеет вид $(x, y) \mapsto (ax + by, cx + dy)$.

Задача 6. Докажите, что проективное преобразование прямой однозначно задается образами трех точек.

Задача 7. Докажите, что любое проективное преобразование прямой можно представить в виде композиции проецирований прямых.

Задача 8. Докажите, что квадрат нетождественного преобразования $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ тождествен тогда и только тогда, когда $a + d = 0$.

Задача 9. f — дробно-линейное преобразование проективной прямой такое, что $f(a) \neq a$ и $f(f(a)) = a$ для некоторой точки a. Докажите, что $f(f(x)) = x$ для всех x.

Задача 10. В трехмерном пространстве даны прямые l_1, l_2, l_3. Прямые a, b, c, d пересекают каждую из этих трех прямых. Докажите, что двойные отношения для четверок точек, лежащих на прямых l_1, l_2, l_3, одинаковые.

Задача 11. Назовем четверку точек $\{a, b, c, d\}$ *гармонической*, если $[a, b, c, d] = -1$. Пусть f — некоторое преобразование проективной прямой, переводящее любую гармоническую четверку точек в гармоническую четверку точек. Докажите, что тогда f — проективное преобразование.

Задача 12. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, а продолжения его сторон пересекаются в точках E и F. Прямая AC пересекает прямую EF в точке P. Докажите, что $\{A, C, O, P\}$ — гармоническая четверка точек.