3. Линейные преобразования плоскости (23.09.2004)

Рассмотрим линейные отображения плоскости в себя. Они задаются формулой $(x, y) \mapsto (ax + by, cx + dy)$, или в матричном виде

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Матрица размера 2×2, возникшая в этой формуле, называется *матрицей линейного отображения*, а её определитель $ad - bc$ определителем отображения. Если линейное отображение плоскости в себя является взаимно однозначным, то оно называется *линейным преобразованием плоскости.*

Задача 1. Докажите, что линейное отображение является линейным преобразованием тогда и только тогда, когда его определитель не равен нулю.

Задача 2. Докажите, что поворот вокруг начала координат является линейным преобразованием и найдите его матрицу (считайте, что поворот происходит на угол α против часовой стрелки).

Задача 3. Приведите геометрическое описание преобразований, задаваемых матрицами
а) $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 4. Докажите, что линейное преобразование переводит параллелограмм в параллелограмм.

Задача 5. Докажите, что площадь параллелограмма при применении линейного преобразования умножается на модуль определителя преобразования.

Другими словами условие задачи 4 можно сформулировать так. Линейное преобразование переводит равные направленные отрезки в равные. Значит, можно корректно определить образ (свободного) вектора при линейном преобразовании.

Задача 6. Докажите, что линейное преобразование плоскости однозначно определяется образами двух непропорциональных векторов.

Задача 7. Докажите, что произвольное линейное преобразование плоскости представляется в виде композиции поворотов (задача 2), растяжений по осям (задача 3 а)) и стяжек вдоль оси (задача 3 б))

Задача 8. (Усиление утверждения предыдущей задачи.) Для получения любого линейного преобразования плоскости достаточно композиции поворотов и растяжений по осям.

Если линейное преобразование переводит ненулевой вектор в пропорциональный, то такой вектор называется *собственным вектором линейного преобразования.* Очевидно, что любой вектор, пропорциональный собственному, также является собственным.

Задача 9. Опишите все линейные преобразования плоскости, для которых любой вектор является собственным.

Задача 10. Докажите, что если не все векторы плоскости являются собственными для линейного преобразования, то оно имеет не более двух непропорциональных собственных векторов.

Задача 11. Рассмотрим линейное преобразование с определителем 1, для которого не все векторы плоскости являются собственными. Найдите условия на матрицу преобразования в терминах её следа $a + d$ для выполнения каждого из следующих условий:
а) оно не имеет собственных векторов;
б) оно имеет единственный собственный вектор (с точностью до пропорциональности);
в) оно имеет два непропорциональных собственных вектора.

Линейные преобразования плоскости также могут интерпретироваться, как проективные преобразования проективной прямой в однородных координатах (см. задачу 5 листка 2). Поэтому мы можем фактически отождествить эти два понятия.

Задача 12. Докажите, что при таком отождествлении собственные векторы соответствуют неподвижным точкам на проективной прямой.