Листок №4

Непрерывная метрика на афинной плоскости $\mathbb{R}^2$ называется гильбертовой, если для любого отрезка $[xy]$ на плоскости и любой точки z, лежащей на $[xy]$, выполняется равенство
$d(x,z) + d(z,y) = d(x,y)$ $(*)$

Задача 1. Доказать, что прибавление к произвольной гильбертовой метрике $d(x,y)$ евклидовой метрики $e(x,y)$ приводит снова к гильбертовой метрике.

Проделав эту операцию, можно всегда считать, что рассматриваемая гильбертова метрика удовлетворяет *следующему условию*: для любых трех неколлинеарных точек x, y, z в $\mathbb{R}^2$ неравенство треугольника выполняется строго $(**)$.
Метрика, подчиненная условиям $(*)$ и $(**)$, называется *проективной.*

Задача 2. Определить метрику Кели-Клейна (в дальнейшем $2K$-метрика) внутри угла на плоскости (например, определить её в положительной четверти). Будет ли она проективной?

Задача 3. Определим на афинной плоскости $\mathbb{R}^2$ расстояние по формуле

$$d(x,y) = \left((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\right)^{1/2} + |f(x_1) - f(x_2)| + |f(y_1) - f(y_2)|,$$

где $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 3t, & 0 \le t \le 1 \\ 3, & t > 1 \end{cases}$.
Доказать, что полученная метрика проективна.

Задача 4. Будет ли проективной $2K$-метрика в треугольнике?

Задача 5. Будет ли она проективной в эллипсе $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$?

Задача 6. Рассмотрим внутренность эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ с $2K$-метрикой. Написать уравнение окружности с центром в т.$(0,0)$ и радиусом $log 2$.

Задача 7. В положительной четверти с $2K$-метрикой нарисовать окружность с центром в точке P и радиусом $log 2$.

Проекция и **Перпендикулярная прямая**

(всюду внутренность эллипса рассматривается с $2K$-метрикой)

Задача 8. Рассмотрим в эллипсе $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (или в любом гладком овале) прямую l и точку P, лежащую вне l. *Проекцией* точки P на l называется такая точка $F \in l$, что $d(P,F) \le d(P,X)$, где X пробегает прямую l.
а) доказать, что такая точка существует;
б) доказать её единственность.

Назовем прямую PF *перпендикулярной* прямой l.

в) докажите, что проекция любой точки прямой PF на прямую l совпадает с F.

Задача 9*. Конструкция прямой через заданную точку P внутри эллипса, перпендикулярной данной прямой l:
пусть A и B точки пересечения l с эллипсом.
Проведем касательные к эллипсу в этих точках. Пусть касательные пересекаются в точке Q (возможно бесконечно удаленной). Тогда прямая PQ - искомая. Почему?

Метрики Минковского

Гильбертова метрика в $\mathbb{R}^2$ называется *метрикой Минковского*, если гильбертова середина любого отрезка совпадает с его евклидовой серединой (для непрерывных метрик этого достаточно, чтобы утверждать, что и евклидовы трети совпадают с гильбертовыми и т.д.).

Задача 10.
а) Доказать, что шар в метрике Минковского - выпуклая центрально-симметричная фигура.
б)** Доказать, что метрики Минковского - это в точности гильбертовы метрики, инвариантные относительно параллельных переносов плоскости.