Геометрия: листок 5. Проективная плоскость (6.10.2004)

Выберем в пространстве точку O вне плоскости Π и сопоставим каждой точке $A \in \Pi$ прямую OA. Тогда бесконечно удаленным точкам плоскости соответствуют прямые, проходящие через точку O параллельно плоскости Π. Назовем *проективной плоскостью* множество всех прямых в пространстве, проходящих через фиксированную точку O. *Проективная прямая* на проективной плоскости задаётся как множество всех прямых, проходящих через точку O и лежащих в одной плоскости.

Пусть O — начало системы координат в пространстве. Тогда точке проективной плоскости (т.е. прямой, проходящей через точку O) можно сопоставить тройку чисел (x, y, z) — координаты точки на этой прямой, причем тройки (x, y, z) и $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ считаются эквивалентными. Эту тройку чисел назовем *однородными координатами* точки проективной плоскости.

Задача 1. Докажите, что проективную плоскость можно представить как обычную плоскость, пополненную бесконечно удаленной прямой $z = 0$.

Проективным преобразованием проективной плоскости называют взаимно однозначное отображение, которое переводит каждую проективную прямую в проективную прямую и сохраняет двойное отношение.

Проективное преобразование проективной плоскости можно также рассматривать как преобразование обычной плоскости $z \neq 0$. При этом преобразованием может быть не определено для некоторых точек (а именно, для прообразов бесконечно удаленных точек).

Задача 2. Докажите, что сечение прямого кругового конуса $x^2 + y^2 = az^2$ плоскостью, не проходящей через его вершину, является либо эллипсом, либо параболой, либо гиперболой.

Задача 3. а) Постройте проекцию кругового сечения конуса на эллиптическое сечение так, чтобы центр круга переходил в точку, делящую большую ось эллипса в данном отношении.

б) Примените преобразование, переводящее эллипс в круг, и постройте проективное преобразование плоскости, которое переводит данный круг в себя и переводит его центр в произвольную внутреннюю точку круга.

Задача 4. Решите задачу 3 б) с помощью проекции сферы из полюса на экваториальную плоскость. (Для этого нужно следующее свойство этого отображения: любая окружность на сфере переходит в окружность или в прямую.)

Задача 5. Докажите, что существует проективное преобразование плоскости, которое переводит данный круг в себя и при этом переводит данную точку и проходящую через нее хорду в произвольную другую данную точку и проходящую через нее хорду.

Задача 6. Даны окружность и не пересекающая ее прямая. Докажите, что существует проективное преобразование плоскости, которое переводит данную окружность в себя, а данную прямую — в бесконечно удаленную прямую.

Задача 7. Докажите, что проективное преобразование проективной плоскости в однородных координатах задаётся так:

$$(x, y, z) \mapsto (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z).$$

Задача 8. Проективное преобразование переводит данную окружность в себя и при этом оставляет ее центр на месте. Докажите, что это преобразование — поворот или симметрия относительно прямой.

Задача 9. Существует ли проективное преобразование плоскости, сохраняющее окружность, но переводящее ее внутренние точки во внешние?

Задача 10. а) Докажите, что проективное преобразование плоскости однозначно задается образами четырех точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой.

б) Докажите, что для любых четырех точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, существует проективное преобразование плоскости, переводящее их в вершины квадрата.

Задача 11. Проективное преобразование плоскости переводит вершины квадрата $ABCD$ в себя следующим образом: $A \mapsto A$, $B \mapsto C$, $C \mapsto D$, $D \mapsto B$. Существует ли прямая, переходящая в себя при этом преобразовании?

Задача 12. Докажите, что с помощью одной линейки нельзя построить середину отрезка.