6. Модель Клейна плоскости Лобачевского (14.10.2004)

Задача 1. Докажите, что перпендикуляр (в смысле евклидовой геометрии) к диаметру модели Клейна является перпендикуляром в смысле геометрии Лобачевского.

Задача 2. Докажите, что высоты треугольника либо попарно не пересекаются, либо пересекаются в одной точке.

Задача 3. Как (с помощью евклидовых циркуля и линейки) выполнить следующие построения в модели Клейна:

а) построить середину данного отрезка;

б) соединить данную точку с данной прямой кратчайшим отрезком (т. е. опустить перпендикуляр);

в) построить биссектрису угла между данными двумя прямыми?

Выпуклым многоугольником называется пересечение конечного множества полуплоскостей, содержащее непустое открытое множество. *Стороны* многоугольника — это отрезки прямых и дуги абсолюта, его ограничивающие. При этом дуги абсолюта будем называть *несобственными сторонами* многоугольника. Вершины многоугольника, лежащие на абсолюте, тоже будем называть *несобственными*. Многоугольник, все вершины которого собственные, называется *ограниченным*. Многоугольник, все стороны которого собственные, будем называть *собственным*, а имеющий несобственные стороны — *несобственным*. В дальнейшем, если не оговорено противное, под словом «многоугольник» будем понимать выпуклый собственный многоугольник.

Задача 4. Докажите, что все треугольники с вершинами на абсолюте равны.

Задача 5. Докажите, что все описанные четырёхугольники с вершинами на абсолюте равны.

Площадью называется неотрицательная функция на множестве многоугольников, обладающая следующими свойствами:

а) площади равных многоугольников равны;

б) если многоугольник разрезан на два многоугольника, то его площадь равна сумме площадей частей;

в) площадь треугольника с вершинами на абсолюте равна π.

Обоснование существования и единственности площади опустим.

Задача 6. Докажите, что из всех треугольников наибольшую площадь имеет треугольник с вершинами на абсолюте.

Задача 7. Докажите, что все четырёхугольники с вершинами на абсолюте имеют равные площади.

Задача 8. Найдите площадь четырёхугольника, одна вершина которого лежит на абсолюте, а углы при трёх остальных вершинах прямые.

Задача 9. Докажите, что существуют собственные многоугольники сколь угодно большой площади (иными словами, площадь всей плоскости Лобачевского бесконечна).

Задача 10. Докажите, что площадь любого несобственного многоугольника бесконечна.