21.10.2004

Листок №7

Геометрия Лобачевского

Все нужные определения можно найти в книге В.В. Прасолова "Геометрия Лобачевского".

Задача1. Классификация движений.

Пусть $\gamma \in Isom^{+}\mathbb{H}^2$. Рассмотрим величину $d(\gamma) = \inf\limits_{x \in \mathbb{H}^2} dist\,(x, \gamma x)$.

Тогда:

а) Если $d(\gamma) > 0$, то γ - гиперболический элемент, а его ось $l(\gamma)$ - это геометрическое место точек $x \in \mathbb{H}^2$, где достигается минимум функции $dist\,(x, \gamma x)$.

б) Если $d(\gamma) = 0$ и минимум функции $dist\,(x, \gamma x)$ достигается, то γ - эллиптический элемент.

в) Если $d(\gamma) = 0$, но минимум не достигается, то γ - параболический элемент.

Доказать.

Задача 2. Орициклы, эквидистанты, окружности.

Пусть $X \subset \mathbb{H}^2$ - орицикл, эквидистанта или окружность, A и B - две произвольные точки на X, а l_{AB} - бисектор отрезка AB. Доказать, что все такие бисекторы пересекаются в одной точке, лежащей на абсолюте, за абсолютом или в $\mathbb{H}^2$ соответственно.

Задача 3. Можно ли замостить правильный гиперболический треугольник со стороной 100 правильными треугольниками со стороной 1.

Задача 4. Доказать, что остроугольный гиперболический многоугольник целиком проецируется на любую свою сторону.

Задача 5. Пусть r - отражение относительно прямой l, а ρ - гиперболический сдвиг на расстояние d вдоль прямой m, не пересекающей l. Опишите движение $r \circ \rho \circ r$. Как изменится ответ, если прямые l и m пересекаются или параллельны?

Задача 6. Расстояние между двумя расходящимися прямыми равно d. Найти длину проекции одной прямой на другую.

Задача 7. Доказать, что диаметр окружности, вписанной в треугольник, не превосходит $ln 3$.

Задача 8. Из точки B, лежащей на стороне идеального треугольника, опущены перпендикуляры BA и BC на две другие стороны. Найти угол $\angle ABC$.