Геометрия: листок 8. Гиперболическая геометрия треугольника (27.10.2004)

Углом параллельности для точки A и прямой l называют половину величины угла, образованного лучами с вершиной A, параллельными прямой l.

Задача 1. Пусть α — угол параллельности, a — расстояние от точки до прямой. Докажите, что $e^{-a} = \operatorname{tg}(\alpha/2)$.

Задача 2. Выведите из предыдущего соотношения такие соотношения: $\operatorname{ch} a \sin\alpha = 1$, $\operatorname{sh} a \operatorname{tg}\alpha = 1$ и $\operatorname{th} a = \cos\alpha$.

Задача 3. Докажите, что в гиперболической геометрии сумма углов треугольника меньше π.

Величины углов треугольника ABC будем обозначать α, β и γ, а длины противолежащих им сторон будем обозначать a, b и c.

Задача 4. Докажите, что в треугольнике с прямым углом γ выполняются следующие соотношения: а) $\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b$; б) $\operatorname{th} a = \operatorname{sh} b \operatorname{tg}\alpha$.

Задача 5. С помощью задачи 4 докажите, что в треугольнике с прямым углом γ выполняются также следующие соотношения: $\operatorname{sh} a = \operatorname{sh} c \sin\alpha$, $\operatorname{th} b = \operatorname{th} c\cos\alpha$, $\cos\alpha = \operatorname{ch} a \sin\beta$, $\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta = \operatorname{ch} c$.

Задача 6. Докажите, что для произвольного треугольника выполняются следующие соотношения:
а) $\dfrac{\operatorname{sh} a}{\sin\alpha} = \dfrac{\operatorname{sh} b}{\sin\beta} = \dfrac{\operatorname{sh} c}{\sin\gamma}$ (теорема синусов);
б) $\operatorname{ch} a = \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c - \operatorname{sh} b \operatorname{sh} c \cos\alpha$ (теорема косинусов.)

Задача 7. Докажите, что стороны и углы треугольника связаны следующими соотношениями:
а) $\operatorname{ch} a \sin\beta = \operatorname{ch} b \sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma$;
б) $\operatorname{ch} a = \dfrac{\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}$.

Задача 8. Докажите, что если соответственные углы двух треугольников равны, то равны и сами треугольники.

Задача 9. а) Пусть ds — расстояние между бесконечно близкими точками (x, y) и $(x + dx, y + dy)$ в модели Пуанкаре в верхней полуплоскости. Докажите, что $ds = \dfrac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}$.

б) Докажите, что в модели Пуанкаре в круге гиперболическое расстояние между бесконечно близкими точками w и $w + dw$ равно $\dfrac{2|dw|}{1 - |w|^2}$.

Задача 10. Докажите, что длина гиперболической окружности радиуса r равна $2\pi \operatorname{sh} r$.

Задача 11. а) Докажите, что при $\alpha < \dfrac{(n-2)\pi}{n}$ существует правильный n-угольник, все углы которого равны α и все стороны которого равны.

б) При каких n существует правильный n-угольник с углом $\alpha = \dfrac{2\pi}{n}$ (т. е. с суммой углов 2π)?

Задача 12. Три угла четырехугольника равны $\pi/2$, а четвертый угол равен γ. Найдите γ, если известны длины a и b сторон, соединяющих прямые углы.

Задача 13. а) Докажите, что перпендикуляр, восставленный из середины стороны AB треугольника ABC, перпендикулярен прямой, соединяющей середины сторон AC и BC.

б) Пусть $X \mapsto X'$ — изометричное отображение одной прямой на другую. Докажите, что середины отрезков XX' либо совпадают, либо лежат на одной прямой.

Задача 14. Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке. Всегда ли медианы делятся точкой пересечения в одном и том же отношении?

Задача 15. Докажите, что длина средней линии гиперболического треугольника меньше половины длины противолежащей стороны.