О. И. Мохов

Геометрия, гамильтоновость и интегрируемость систем гидродинамического типа

1. Системы квазилинейных уравнений с частными производными первого порядка (системы гидродинамического типа): геометрия и гамильтонов подход Дубровина–Новикова. Скобки Дубровина–Новикова и риманова геометрия.

1.1. Системы гидродинамического типа и аффиноры.

В данном курсе лекций мы ограничимся изучением систем квазилинейных уравнений вида

$$\begin{aligned} u^1_t &= v^1_1(u)\, u^1_x + \dots + v^1_N(u)\, u^N_x, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u^N_t &= v^N_1(u)\, u^1_x + \dots + v^N_N(u)\, u^N_x \end{aligned} \tag{1.1}$$

или в матричной форме

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^N \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} v^1_1(u) & \cdots & v^1_N(u) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ v^N_1(u) & \cdots & v^N_N(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^N \end{pmatrix}_x, \tag{1.2}$$

где $u = (u^1, \dots, u^N)$ — локальные координаты в некоторой координатной окрестности на некотором N-мерном гладком многообразии или в некоторой области $\mathbf{R}^N$; x — пространственная переменная, t — переменная времени; $(u^1(x,t), \dots, u^N(x,t))$ — вектор-функция (двух независимых переменных x и t) со значениями в области $\mathbf{R}^N$ с локальными координатами $u^1, \ldots, u^N$; $v^i_j(u)$, $1 \le i, j \le N$, — гладкие функции локальных координат (матрица $v^i_j(u)$, $1 \le i, j \le N$, называется *матрицей системы* (1.2));

$$u^i_t = \frac{\partial u^i(x,t)}{\partial t}, \qquad u^i_x = \frac{\partial u^i(x,t)}{\partial x}, \qquad 1 \le i \le N.$$

Системы вида (1.2) являются эволюционными $(1+1)$-мерными (т.е. пространственно-одномерными) N-компонентными системами однородных квазилинейных уравнений с частными производными первого порядка и называются также *одномерными N-компонентными однородными системами гидродинамического типа* или зачастую просто *системами гидродинамического типа*.

Системы вида (1.2) возникают и играют фундаментальную роль в гидродинамике и газовой динамике, в теории поля, в математической и теоретической физике, во многих классических задачах математики и во многих прикладных задачах. Еще Риман указал, что теория систем вида (1.2) — это теория тензорных полей $v^i_j(u)$ в области $\mathbf{R}^N$ с локальными координатами $u^1, \ldots, u^N$. Действительно, класс одномерных N-компонентных однородных систем гидродинамического типа (1.2) инвариантен относительно обратимых локальных замен координат, причем при произвольной обратимой локальной замене координат

$$u^i = u^i(w^1, \ldots, w^N), \qquad 1 \le i \le N, \tag{1.3}$$

матрица системы (1.2) $v^i_j(u)$ преобразуется как тензорное поле типа (1,1):

$$\tilde{v}^i_j(w) = \frac{\partial w^i}{\partial u^s} v^s_r(u(w)) \frac{\partial u^r}{\partial w^j}, \tag{1.4}$$

а система (1.2) принимает вид

$$\begin{pmatrix} w^1 \\ \vdots \\ w^N \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} \tilde{v}^1_1(w) & \cdots & \tilde{v}^1_N(w) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \tilde{v}^N_1(w) & \cdots & \tilde{v}^N_N(w) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w^1 \\ \vdots \\ w^N \end{pmatrix}_x . \tag{1.5}$$

Здесь

$$J^i_j(w) = \frac{\partial u^i}{\partial w^j}, \qquad 1 \le i, j \le N, \tag{1.6}$$

— матрица Якоби локальной замены координат (1.3),

$$\left(J^{-1}\right)^i_j(w) = \frac{\partial w^i}{\partial u^j}, \qquad 1 \le i, j \le N, \tag{1.7}$$

— матрица, обратная матрице (1.6):

$$\frac{\partial u^i}{\partial w^j} \frac{\partial w^j}{\partial u^k} = \delta^i_k. \tag{1.8}$$

Матрица

$$\left(J^{-1}\right)^i_j(w(u)) = \frac{\partial w^i}{\partial u^j}, \qquad 1 \le i, j \le N, \tag{1.9}$$

является матрицей Якоби обратной локальной замены координат

$$w^i = w^i(u^1, \ldots, u^N), \quad 1 \le i \le N. \tag{1.10}$$

В формулах (1.4) и (1.8) применяется обычное тензорное соглашение, что по повторяющимся индексам производится суммирование. В частности, система гидродинамического типа (1.2) в тензорной форме принимает вид

$$u^i_t = v^i_j(u) u^j_x, \quad 1 \le i, j \le N. \tag{1.11}$$

Произвольное тензорное поле типа (1,1) называется *аффинорным полем* или *аффинором.* Таким образом, теория общих систем гидродинамического типа — это общая теория аффиноров или аффинорных полей.

Для многих фундаментальных уравнений гидродинамики и газовой динамики, теории поля и математической физики характерно наличие важной и чрезвычайно полезной дополнительной специальной структуры — гамильтоновой структуры. Мы изучим вопрос о естественных классах гамильтоновых структур для систем гидродинамического типа, который приводит к очень интересным геометрическим задачам и важным следствиям, и выделим естественный класс гамильтоновых систем гидродинамического типа. Но сначала кратко и схематично изложим необходимые общие элементарные сведения по теоретико-полевому гамильтонову формализму.

1.2. Необходимые элементарные сведения по теоретико-полевому гамильтонову формализму.

Вариационная производная

$$\frac{\delta I}{\delta u^k(x)}, \quad 1 \le k \le N, \tag{1.12}$$

произвольного функционала I, определенного на пространстве вектор-функций $u(x) = (u^1(x), \ldots, u^N(x))$ одной независимой переменной x, определяется равенством

$$\delta I \equiv I[u + \delta u] - I[u] = \int \frac{\delta I}{\delta u^k(x)} \delta u^k(x)\, dx + o(\delta u), \tag{1.13}$$

где $\delta u(x)$ — вариация функции $u(x)$ (все вариации можно считать финитными функциями). В частности, для *локальных функционалов*, т.е. функционалов вида

$$I = \int L(x, u, u_x, u_{xx}, \ldots, u_{(n)})\, dx, \tag{1.14}$$

вариационная производная имеет вид (докажите!)

$$\frac{\delta I}{\delta u^k(x)} = E(L) \equiv \frac{\partial L}{\partial u^k} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial u^k_x} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial L}{\partial u^k_{xx}} - \cdots + (-1)^r \frac{d^r}{dx^r}\frac{\partial L}{\partial u^k_{(r)}} + \cdots. \tag{1.15}$$

Функция L называется *плотностью функционала* (1.14), а линейный оператор

$$E = \frac{\partial}{\partial u^k} - \frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial u^k_x} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial}{\partial u^k_{xx}} - \cdots + (-1)^r \frac{d^r}{dx^r}\frac{\partial}{\partial u^k_{(r)}} + \cdots$$

называется *оператором Эйлера.* Здесь

$$u_x^i = \frac{du^i}{dx}, \qquad u_{xx}^i = \frac{d^2 u^i}{dx^2}, \qquad \dots, \qquad u_{(r)}^i = \frac{d^r u^i}{dx^r}, \qquad \dots, \tag{1.16}$$

$\frac{d}{dx}$ — оператор полной производной по переменной x:

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + u_x^i \frac{\partial}{\partial u^i} + u_{xx}^i \frac{\partial}{\partial u_x^i} + \dots + u_{(r+1)}^i \frac{\partial}{\partial u_{(r)}^i} + \cdots \tag{1.17}$$

Отметим, что мы не указываем область изменения переменной x (область определения функций $u^i(x)$) и граничные условия. При этом мы будем считать, что интеграл по всей области изменения переменной x от полной производной по переменной x всегда равен 0:

$$\int \frac{dF(x, u, u_x, \dots, u_{(n)})}{dx} dx = 0. \tag{1.18}$$

Именно такой подход развивается строго в формальном вариационном исчислении. В качестве конкретных функциональных классов можно рассматривать, например, классы финитных или быстроубывающих функций, а также классы периодических или квазипериодических функций. В частности, можно считать, что рассматриваемое функциональное пространство является пространством петель некоторого конечномерного гладкого многообразия M, т.е. пространством всех гладких параметризованных отображений окружности S^1 в многообразие M.

Рассмотрим произвольный матричный оператор $K^{ij}[u(x)]$, зависящий от вектор-функции $u(x)$, и рассмотрим на пространстве функционалов скобку

$$\{F, G\} = \int \frac{\delta F}{\delta u^i(x)} K^{ij}[u(x)] \frac{\delta G}{\delta u^j(x)} dx, \tag{1.19}$$

определяемую оператором $K^{ij}[u(x)]$. Для скобки (1.19) автоматически выполняется тождество Лейбница (докажите!):

$$\{FG, H\} = F\{G, H\} + G\{F, H\}. \tag{1.20}$$

Оператор $K^{ij}[u(x)]$ называется *гамильтоновым*, если он определяет на пространстве функционалов *скобку Пуассона* (*пуассонову структуру*) (1.19), т.е. для произвольных функционалов F, G, H скобка (1.19) кососимметрична:

$$\{F, G\} = -\{G, F\}, \tag{1.21}$$

и удовлетворяет тождеству Якоби

$$\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0. \tag{1.22}$$

Мы часто будем пользоваться теоретико-полевым представлением для произвольной скобки (1.19), задаваемым на точечных функционалах. *Точечным функционалом* называется функционал вида

$$F[u(z); i, x] = \int u^i(z) \delta(z - x) dz = u^i(x),$$

т.е. функционал, значение которого на вектор-функции $u(z)$ совпадает со значением i-й компоненты этой вектор-функции в фиксированной точке x. Для точечных функционалов имеем (докажите!):

$$\frac{\delta u^i(x)}{\delta u^k(z)} = \delta^i_k \delta(x-z), \tag{1.23}$$

и соответственно

$$\{u^i(x), u^j(y)\} = \int \delta(z-x) K^{ij}[u(z)] \delta(z-y) dz = K^{ij}[u(x)] \delta(x-y). \tag{1.24}$$

Если скобка определяется только на точечных функционалах формулой

$$\{u^i(x), u^j(y)\} = F^{ij}(u; x, y) \tag{1.25}$$

и требуется, чтобы эта скобка была билинейной и на произвольных точечных функционалах выполнялось тождество Лейбница

$$\{u^i(x) u^j(y), u^k(z)\} = u^i(x) \{u^j(y), u^k(z)\} + u^j(y) \{u^i(x), u^k(z)\}, \tag{1.26}$$

то для произвольных функционалов F и G скобка определяется формулой (докажите!)

$$\{F, G\} = \int \frac{\delta F}{\delta u^i(x)} \frac{\delta G}{\delta u^j(y)} \{u^i(x), u^j(y)\} dx dy. \tag{1.27}$$

При этом скобка является скобкой Пуассона, если на произвольных точечных функционалах выполняются условие кососимметричности

$$\{u^i(x), u^j(y)\} = -\{u^j(y), u^i(x)\} \tag{1.28}$$

и тождество Якоби

$$\{\{u^i(x), u^j(y)\}, u^k(z)\} + \{\{u^j(y), u^k(z)\}, u^i(x)\} + \{\{u^k(z), u^i(x)\}, u^j(y)\} = 0. \tag{1.29}$$

Для того, чтобы гарантировать гамильтоновость произвольного кососимметрического оператора, достаточно требовать для соответствующей скобки (1.19) выполнения тождества Якоби только на линейных функционалах, а именно, на всех линейных функционалах вида

$$I = \int f_i(x) u^i(x)\, dx, \tag{1.30}$$

где $f_i(x)$ — произвольные функции. Это условие эквивалентно хорошо известному критерию гамильтоновости произвольного кососимметрического оператора — условию, что для него скобка Схоутена равна нулю.

При произвольной локальной замене координат $u^i = u^i(\tilde{u}^1, \ldots, \tilde{u}^N)$, $1 \le i \le N$, любой гамильтонов оператор $K^{ij}[u(x)]$ (на самом деле даже любой оператор, определяющий произвольную скобку вида (1.19)) преобразуется следующим образом:

$$\widetilde{K}^{sk}[\tilde{u}] = \frac{\partial \tilde{u}^s}{\partial u^i} K^{ij}[u(\tilde{u})] \circ \frac{\partial \tilde{u}^k}{\partial u^j}\,, \tag{1.31}$$

что является элементарным следствием закона преобразования вариационных производных и требования инвариантности соответствующей скобки (докажите!):

$$\{F, G\} = \int \frac{\delta F}{\delta u^i(x)} K^{ij}[u(x)] \frac{\delta G}{\delta u^j(x)}\, dx = \int \frac{\delta F}{\delta \tilde{u}^s(x)} \widetilde{K}^{sk}[\tilde{u}(x)] \frac{\delta G}{\delta \tilde{u}^k(x)}\, dx, \tag{1.32}$$

$$\frac{\delta F}{\delta \tilde{u}^s(x)} = \frac{\delta F}{\delta u^i(x)} \frac{\partial u^i}{\partial \tilde{u}^s}, \quad \frac{\delta G}{\delta \tilde{u}^s(x)} = \frac{\delta G}{\delta u^i(x)} \frac{\partial u^i}{\partial \tilde{u}^s}. \tag{1.33}$$

В дальнейшем мы всегда будем рассматривать гамильтоновы операторы и вариационные производные как соответствующие дифференциально-геометрические объекты, преобразующиеся по формулам (1.31) и (1.33) при произвольных локальных заменах координат $u^1, \ldots, u^N$. Знак $\circ$ в формуле (1.31) и всюду в дальнейшем означает операторное умножение в тех случаях, когда это необходимо, например,

$$\frac{d}{dx} \circ f(x) = f(x) \frac{d}{dx} + \frac{df}{dx}. \tag{1.34}$$

Гамильтонов оператор и соответствующая ему скобка Пуассона называются *локальными*, если этот гамильтонов оператор является дифференциальным оператором с коэффициентами, зависящими только от независимой переменной x, полевых переменных $u^i(x)$ и конечного числа их производных $u^i_{(k)}(x)$, и *ультралокальными*, если гамильтонов оператор имеет вид

$$K^{ij}[u(x)] = \omega^{ij}(u(x)). \tag{1.35}$$

Порядком локальной скобки Пуассона называется порядок гамильтонова дифференциального оператора, задающего эту скобку Пуассона. Свойство локальности и порядок локальной скобки Пуассона инвариантны относительно локальных замен координат. Ультралокальные скобки Пуассона в точности соответствуют классическим скобкам Пуассона на конечномерных многообразиях (докажите!). Напомним, что контравариантный тензор $\omega^{ij}(u)$ (ранга 2) на N-мерном гладком многообразии M задает *пуассонову структуру* (или *бивектор Пуассона*), если на пространстве всех гладких функций на этом многообразии определена следующая билинейная операция (*скобка Пуассона*):

$$\{f(u), g(u)\} = \omega^{ij}(u) \frac{\partial f}{\partial u^i} \frac{\partial g}{\partial u^j}, \tag{1.36}$$

которая кососимметрична

$$\{f(u), g(u)\} = -\{g(u), f(u)\} \tag{1.37}$$

и удовлетворяет тождеству Якоби

$$\{\{f(u), g(u)\}, h(u)\} + \{\{g(u), h(u)\}, f(u)\} + \{\{h(u), f(u)\}, g(u)\} = 0 \tag{1.38}$$

для произвольных гладких функций $f(u), g(u), h(u)$ на многообразии. Тождество Лейбница для любой скобки вида (1.36) выполняется автоматически. *Пуассоновым многообразием* называется конечномерное многообразие с заданной на нем пуассоновой структурой. На конечномерном многообразии M произвольный бивектор Пуассона $\omega^{ij}(u)$ определяется тензорными соотношениями

$$\omega^{ij}(u) = -\omega^{ji}(u) \quad \text{(кососимметричность)}, \tag{1.39}$$

$$\frac{\partial \omega^{ij}}{\partial u^s}\omega^{sk}(u) + \frac{\partial \omega^{jk}}{\partial u^s}\omega^{si}(u) + \frac{\partial \omega^{ki}}{\partial u^s}\omega^{sj}(u) = 0 \quad \text{(тождество Якоби)}. \tag{1.40}$$

Симплектическим многообразием называется конечномерное многообразие с невырожденной пуассоновой структурой, т.е. на многообразии задана пуассонова структура $\omega^{ij}(u)$ такая, что $\det(\omega^{ij}(u)) \neq 0$ всюду на многообразии. *Симплектической структурой* на конечномерном многообразии называется произвольная невырожденная замкнутая 2-форма $\omega_{ij}(u) du^i \wedge du^j$ на многообразии, т.е. $\det(\omega_{ij}(u)) \neq 0$ всюду на многообразии и $(d\omega)_{ijk}(u) du^i \wedge du^j \wedge du^k = 0$. Условия симплектичности произвольного невырожденного ковариантного тензора $\omega_{ij}(u)$ ранга 2, $\det(\omega_{ij}(u)) \neq 0$, имеют вид:

$$\omega_{ij}(u) = -\omega_{ji}(u) \quad \text{(кососимметричность)}, \tag{1.41}$$

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial u^k} + \frac{\partial \omega_{jk}}{\partial u^i} + \frac{\partial \omega_{ki}}{\partial u^j} = 0 \quad \text{(замкнутость)}. \tag{1.42}$$

Если $\det(\omega_{ij}(u)) \neq 0$ всюду на многообразии M, то $\omega_{ij}(u)$ — симплектическая структура на M тогда и только тогда, когда обратная матрица $\omega^{ij}(u)$, $\omega^{is}(u)\omega_{sj}(u) = \delta^i_j$, задает на многообразии M пуассонову структуру $\omega^{ij}(u)$:

$$\{u^i, u^j\} = \omega^{ij}(u). \tag{1.43}$$

Рассмотрим произвольную эволюционную систему уравнений

$$u^i_t = F^i, \quad 1 \leq i \leq N, \tag{1.44}$$

на бесконечномерном фазовом пространстве функций $u^i(x)$, $1 \leq i \leq N$. Система (1.44) называется *гамильтоновой*, если она может быть представлена в виде

$$u^i_t = K^{ij}[u(x)] \frac{\delta H}{\delta u^j(x)}, \quad 1 \leq i, j \leq N, \tag{1.45}$$

где H — некоторый функционал на пространстве функций $u^i(x)$, $1 \leq i \leq N$, называемый *гамильтонианом системы*, а $K^{ij}[u(x)]$ — некоторый гамильтонов оператор. Поскольку

$$\{u^i(x), H\} = \int \delta^i_s \delta(z - x) K^{sj}[u(z)] \frac{\delta H}{\delta u^j(z)} dz = K^{ij}[u(x)] \frac{\delta H}{\delta u^j(x)}, \tag{1.46}$$

гамильтонова система (1.45) представляется в виде

$$u^i_t = \{u^i(x), H\}. \tag{1.47}$$

В частности, для ультралокальных гамильтоновых операторов (1.35) и гамильтонианов вида

$$H = \int h(u(x)) dx \tag{1.48}$$

получаем классические гамильтоновы динамические системы на фазовом пространстве постоянных функций $u^i(x) = u^i$:

$$u^i_t = \omega^{ij}(u) \frac{\partial h}{\partial u^j}. \tag{1.49}$$

В теории скобок Пуассона некоторые функционалы играют особые роли. Функционал C называется *функционалом Казимира* или *аннулятором* скобки Пуассона, если для любого функционала F для этой скобки Пуассона имеем

$$\{F, C\} = 0. \tag{1.50}$$

Функционал P называется *импульсом* скобки Пуассона, если для этой скобки Пуассона для всех индексов i имеем

$$\{u^i(x), P\} = u^i_x. \tag{1.51}$$

Импульс является гамильтонианом трансляций по x с данной скобкой Пуассона:

$$u^i_t = \{u^i(x), P\} = u^i_x, \quad 1 \leq i \leq N. \tag{1.52}$$

Функционал I называется *интегралом* системы (1.44), если в силу этой системы

$$\frac{dI}{dt} = 0, \tag{1.53}$$

т.е. функционал I на любом решении $u^i(x,t)$, $1 \leq i \leq N$, системы (1.44) не зависит от переменной t и является константой. Поскольку для произвольного функционала I

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial t} + \int \frac{\delta I}{\delta u^i(x)} u^i_t dx, \tag{1.54}$$

для произвольной гамильтоновой системы (1.45) имеем

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial t} + \int \frac{\delta I}{\delta u^i(x)} u^i_t dx = \frac{\partial I}{\partial t} + \int \frac{\delta I}{\delta u^i(x)} K^{ij}[u(x)] \frac{\delta H}{\delta u^j(x)} dx = \frac{\partial I}{\partial t} + \{I, H\}. \tag{1.55}$$

Таким образом, функционал I, не зависящий явно от переменной t (т.е. $\partial I/\partial t = 0$), является интегралом произвольной гамильтоновой системы (1.45) тогда и только тогда, когда скобка Пуассона этого функционала с гамильтонианом системы равна нулю:

$$\{I, H\} = 0. \tag{1.56}$$

Скобка Пуассона двух интегралов F и G системы, гамильтоновой относительно этой же скобки Пуассона, является интегралом этой гамильтоновой системы:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\{F, G\} &= \frac{\partial}{\partial t}\{F, G\} + \{\{F, G\}, H\} = \left\{\frac{\partial F}{\partial t}, G\right\} + \left\{F, \frac{\partial G}{\partial t}\right\} - \\ &- \{\{G, H\}, F\} - \{\{H, F\}, G\} = \left\{F, \frac{dG}{dt}\right\} + \left\{\frac{dF}{dt}, G\right\} = 0. \end{aligned} \tag{1.57}$$

Два гамильтоновых оператора M и K называются *согласованными*, если любая линейная комбинация этих операторов $\lambda M + \mu K$, где λ и μ — произвольные константы, также является гамильтоновым оператором. Соответственно, две пуассоновы структуры (скобки Пуассона) *согласованы*, если они заданы согласованными гамильтоновыми операторами. Согласованные пуассоновы структуры впервые были рассмотрены Магри, выяснившим их важную роль в теории интегрируемых систем.

Для любого кососимметрического контравариантного тензора $\omega^{ij}(u)$ на многообразии M левая часть соотношения (1.40) является трехвалентным контравариантным тензором, который называется *скобкой Схоутена контравариантного бивектора* $\omega^{ij}(u)$:

$$[\omega,\omega]^{ijk}(u)=\frac{\partial\omega^{ij}}{\partial u^s}\omega^{sk}(u)+\frac{\partial\omega^{jk}}{\partial u^s}\omega^{si}(u)+\frac{\partial\omega^{ki}}{\partial u^s}\omega^{sj}(u)\,.$$

Скобкой Схоутена двух контравариантных бивекторов $\omega^{ij}(u)$ *и* $f^{ij}(u)$ называется трехвалентный контравариантный тензор

$$[\omega,f]^{ijk}(u)=\frac{\partial\omega^{ij}}{\partial u^s}f^{sk}(u)+\frac{\partial f^{ij}}{\partial u^s}\omega^{sk}(u)+\frac{\partial\omega^{jk}}{\partial u^s}f^{si}(u)+\frac{\partial f^{jk}}{\partial u^s}\omega^{si}(u)+\frac{\partial\omega^{ki}}{\partial u^s}f^{sj}(u)+\frac{\partial f^{ki}}{\partial u^s}\omega^{sj}(u).\qquad(1.58)$$

Конечномерные пуассоновы структуры $\omega^{ij}(u)$ и $f^{ij}(u)$ согласованы тогда и только тогда, когда скобка Схоутена (1.58) равна нулю. Обобщение скобки Схоутена на бесконечномерный случай произвольных кососимметрических дифференциальных операторов M^{ij} и K^{ij}, а также доказательства соответствующих критериев: кососимметрический дифференциальный оператор гамильтонов тогда и только тогда, когда его скобка Схоутена равна нулю, а пара гамильтоновых дифференциальных операторов согласована тогда и только тогда, когда скобка Схоутена этих операторов равна нулю, были найдены Гельфандом и Дорфман.

Система уравнений называется *бигамильтоновой*, если она может быть представлена в гамильтоновом виде (1.45) с помощью двух различных (причем линейно независимых), но согласованных, гамильтоновых операторов $K=(K^{ij})$ и $L=(L^{ij})$:

$$u^i_t=K^{ij}[u(x)]\frac{\delta H_1}{\delta u^j(x)}=L^{ij}[u(x)]\frac{\delta H_2}{\delta u^j(x)}\,,\qquad(1.59)$$

где H_1 и H_2 — соответствующие гамильтонианы.

Приведем здесь кратко схему Магри, связанную с бигамильтоновыми системами.

Если хотя бы один из гамильтоновых операторов K и L обратим (мы для определенности будем считать, что оператор L обратим), то оператор $R=(R^i_s)=(K^{ij}(L^{-1})_{js})$ является оператором рекурсии для системы (1.59), т.е. переводит любые симметрии системы в симметрии, и, более того, этот оператор рекурсии R порождает иерархию коммутирующих гамильтоновых систем $(t=t_0)$

$$u^i_{t_n}=(R^nL)^{ij}\frac{\delta H_2}{\delta u^j(x)}\,,\qquad(1.60)$$

где оператор R^nL является гамильтоновым оператором при любом n. Кроме того, имеет место следующая рекуррентная формула для законов сохранения (интегралов движения) H_m системы (1.59):

$$L^{ij}[u(x)]\frac{\delta H_m}{\delta u^j(x)}=K^{ij}[u(x)]\frac{\delta H_{m-1}}{\delta u^j(x)}\,.\qquad(1.61)$$

При этом при любом m функционал H_m является законом сохранения (интегралом движения) для любой системы из иерархии (1.60). Все эти интегралы движения H_m находятся в инволюции относительно пуассоновых структур, порождаемых гамильтоновыми операторами L и K, т.е.

$$\int \frac{\delta H_m}{\delta u^i(x)} L^{ij}[u(x)] \frac{\delta H_r}{\delta u^j(x)}\, dx = \int \frac{\delta H_m}{\delta u^i(x)} K^{ij}[u(x)] \frac{\delta H_r}{\delta u^j(x)}\, dx = 0. \tag{1.62}$$

Любая система из иерархии (1.60) является бигамильтоновой и представляется в следующем виде:

$$u^i_{t_n} = L^{ij} \frac{\delta H_{n+2}}{\delta u^j(x)} = K^{ij} \frac{\delta H_{n+1}}{\delta u^j(x)}. \tag{1.63}$$

Фактически любая бигамильтонова система является *мультигамильтоновой* (в частности, *тригамильтоновой* или *n-гамильтоновой*, $n > 2$) т.е. обладает n ($n > 2$) взаимно согласованными гамильтоновыми представлениями, более того, такая система является n-гамильтоновой для любого n, так как все уравнения иерархии (1.60) являются гамильтоновыми относительно гамильтонова оператора $R^n L$ при любом n, и все эти гамильтоновы операторы согласованы между собой — любая линейная комбинация операторов $R^n L$ при различных n всегда является гамильтоновым оператором.

Вообще говоря, интегралы движения H_m, получаемые рекуррентным соотношением (1.61), могут быть линейно зависимыми, но во многих случаях оператор рекурсии изменяет порядок системы, и при этом изменяется порядок старшей производной плотности гамильтониана (после максимального его понижения с помощью добавления к плотности гамильтониана любых полных производных по независимой переменной x), что обычно позволяет в конкретных примерах устанавливать их независимость.

Рекуррентную процедуру (1.61) обычно называют также схемой Ленарда–Магри, так как впервые рекуррентное соотношение типа (1.61) было найдено Ленардом для интегралов Крускала уравнения Кортевега–де Фриза, но без всякой связи с теорией гамильтоновых операторов.

Все утверждения схемы Магри доказываются в рамках формального вариационного исчисления в предположении, что на каждом шаге рекуррентное соотношение

$$L\xi_m = K\xi_{m-1},$$

где

$$(\xi_1)_j = \frac{\delta H_1}{\delta u^j(x)}, \qquad (\xi_2)_j = \frac{\delta H_2}{\delta u^j(x)},$$

разрешается относительно ξ_m.

1.3. Гамильтоновы системы гидродинамического типа. Гамильтонов подход Дубровина–Новикова.

Общий дифференциально-геометрический гамильтонов подход к системам гидродинамического типа (1.2) был предложен Дубровиным и Новиковым в 1983 году.

Рассмотрим теоретико-полевые скобки вида

$$\{u^i(x), u^j(y)\} = K^{ij}[u(x)]\delta(x-y) = g^{ij}(u(x))\delta_x(x-y) + b^{ij}_k(u(x))u^k_x \delta(x-y), \tag{1.64}$$

где коэффициенты $g^{ij}(u)$ и $b^{ij}_k(u)$ — произвольные гладкие функции локальных координат, т.е. соответствующие операторы $K^{ij}[u(x)]$ являются произвольными матричными однородными одномерными дифференциальными операторами первого порядка

$$K^{ij}[u(x)] = g^{ij}(u(x))\frac{d}{dx} + b^{ij}_k(u(x))u^k_x, \tag{1.65}$$

каждое слагаемое которых имеет степень однородности 1 относительно естественной градуировки

$$\deg(ab) = \deg a + \deg b, \qquad \deg f(u(x)) = \deg u(x) = 0, \qquad \deg \frac{d}{dx} = \deg u^k_x = 1. \tag{1.66}$$

Из билинейности скобки и из выполнения для нее тождества Лейбница следует, что на произвольных функционалах F и G скобка (1.64) принимает вид (докажите!)

$$\{F, G\} = \int \frac{\delta F}{\delta u^i(x)}\left(g^{ij}(u(x))\frac{d}{dx} + b^{ij}_k(u(x))u^k_x\right)\frac{\delta G}{\delta u^j(x)}dx. \tag{1.67}$$

Для любой скобки вида (1.67) и любого *функционала гидродинамического типа*, т.е. локального функционала вида

$$H = \int h(u(x))dx, \tag{1.68}$$

плотность $h(u(x))$ которого зависит только от полевых переменных $u(x)$ и не зависит от их производных, система уравнений

$$u^i_t = \{u^i(x), H\} \tag{1.69}$$

всегда является системой квазилинейных уравнений с частными производными первого порядка вида (1.2), т.е. системой гидродинамического типа. Действительно, для скобки вида (1.67) и функционала H вида (1.68) система (1.69) имеет вид

$$u^i_t = \left(g^{ij}(u(x))\frac{d}{dx} + b^{ij}_k(u(x))u^k_x\right)\frac{\partial h}{\partial u^j} = \left(g^{ij}(u(x))\frac{\partial^2 h}{\partial u^j \partial u^k} + b^{ij}_k(u(x))\frac{\partial h}{\partial u^j}\right)u^k_x. \tag{1.70}$$

Матрица системы (1.69) имеет вид

$$v^i_k(u) = g^{ij}(u)\frac{\partial^2 h}{\partial u^j \partial u^k} + b^{ij}_k(u)\frac{\partial h}{\partial u^j}. \tag{1.71}$$

Отметим, что класс скобок вида (1.67), класс функционалов (гамильтонианов) вида (1.68) и класс аффиноров вида (1.71) инвариантны относительно локальных замен координат (докажите!).

Из общих формул (1.31) преобразования операторов произвольных скобок вида (1.19) при локальной замене координат $u^i = u^i(\tilde{u}^1, \ldots, \tilde{u}^N)$, $1 \le i \le N$, мы получаем следующие формулы преобразования для коэффициентов скобки (1.67):

$$\widetilde{K}^{sk}[\tilde{u}] = \frac{\partial \tilde{u}^s}{\partial u^i}K^{ij}[u(\tilde{u})] \circ \frac{\partial \tilde{u}^k}{\partial u^j} =$$

$$= \frac{\partial \tilde{u}^s}{\partial u^i}\left(g^{ij}(u(\tilde{u}))\frac{d}{dx} + b^{ij}_r(u(\tilde{u}))\frac{\partial u^r}{\partial \tilde{u}^p}\tilde{u}^p_x\right)\circ\frac{\partial \tilde{u}^k}{\partial u^j} =$$
$$= \frac{\partial \tilde{u}^s}{\partial u^i}g^{ij}(u(\tilde{u}))\frac{\partial \tilde{u}^k}{\partial u^j}\frac{d}{dx} + \frac{\partial \tilde{u}^s}{\partial u^i}g^{ij}(u(\tilde{u}))\frac{\partial^2 \tilde{u}^k}{\partial u^j \partial u^r}\frac{\partial u^r}{\partial \tilde{u}^p}\tilde{u}^p_x +$$
$$+\frac{\partial \tilde{u}^s}{\partial u^i}b^{ij}_r(u(\tilde{u}))\frac{\partial u^r}{\partial \tilde{u}^p}\frac{\partial \tilde{u}^k}{\partial u^j}\tilde{u}^p_x = \tilde{g}^{sk}(\tilde{u})\frac{d}{dx} + \tilde{b}^{sk}_p(\tilde{u})\tilde{u}^p_x, \tag{1.72}$$

т.е.

$$\tilde{g}^{sk}(\tilde{u}) = \frac{\partial \tilde{u}^s}{\partial u^i}g^{ij}(u(\tilde{u}))\frac{\partial \tilde{u}^k}{\partial u^j}, \tag{1.73}$$
$$\tilde{b}^{sk}_p(\tilde{u}) = \frac{\partial \tilde{u}^s}{\partial u^i}g^{ij}(u(\tilde{u}))\frac{\partial^2 \tilde{u}^k}{\partial u^j \partial u^r}\frac{\partial u^r}{\partial \tilde{u}^p} + \frac{\partial \tilde{u}^s}{\partial u^i}b^{ij}_r(u(\tilde{u}))\frac{\partial u^r}{\partial \tilde{u}^p}\frac{\partial \tilde{u}^k}{\partial u^j}, \tag{1.74}$$
$$g^{ij}(u(\tilde{u})) = \frac{\partial u^i}{\partial \tilde{u}^s}\tilde{g}^{sr}(\tilde{u})\frac{\partial u^j}{\partial \tilde{u}^r},$$
$$b^{ij}_q(u(\tilde{u})) = \frac{\partial u^i}{\partial \tilde{u}^s}\frac{\partial^2 u^j}{\partial \tilde{u}^r \partial \tilde{u}^p}\frac{\partial \tilde{u}^p}{\partial u^q}\tilde{g}^{sr}(\tilde{u}) + \frac{\partial u^i}{\partial \tilde{u}^s}\frac{\partial u^j}{\partial \tilde{u}^r}\frac{\partial \tilde{u}^p}{\partial u^q}\tilde{b}^{sr}_p(\tilde{u}).$$

Это позволяет развить общий дифференциально-геометрический подход к системам гидродинамического типа специального вида (1.69).

Коэффициенты $g^{ij}(u)$ преобразуются как тензоры с верхними индексами (контравариантные тензоры ранга 2). Если $\det(g^{ij}(u)) \neq 0$, то скобка (1.67) называется *невырожденной*. Для невырожденных скобок вида (1.67) введем коэффициенты $\Gamma^j_{sk}(u)$ по формулам:

$$b^{ij}_k(u) = -g^{is}(u)\Gamma^j_{sk}(u).$$

Коэффициенты $\Gamma^i_{jk}(u)$ преобразуются как коэффициенты аффинной связности:

$$\Gamma^j_{pq}(u(\tilde{u})) = \frac{\partial u^j}{\partial \tilde{u}^k}\left(\tilde{\Gamma}^k_{rs}(\tilde{u})\frac{\partial \tilde{u}^s}{\partial u^q}\frac{\partial \tilde{u}^r}{\partial u^p} + \frac{\partial^2 \tilde{u}^k}{\partial u^p \partial u^q}\right).$$

Таким образом, любая невырожденная скобка вида (1.67) определяется произвольным невырожденным контравариантным тензором $g^{ij}(u)$ ранга 2 и произвольной аффинной связностью $\Gamma^i_{jk}(u)$. Для любой невырожденной скобки вида (1.67) и для любого функционала гидродинамического типа (1.68) матрица (1.71) соответствующей системы гидродинамического типа (1.69) всегда является матрицей вторых ковариантных производных плотности функционала $h(u)$:

$$v^i_j(u) = g^{is}(u)\nabla_j\nabla_s h(u) = g^{is}(u)\widehat{\nabla}_s\widehat{\nabla}_j h(u) = \widehat{\nabla}^i\widehat{\nabla}_j h(u), \tag{1.75}$$

где ∇_i — оператор ковариантного дифференцирования, задаваемый аффинной связностью $\Gamma^i_{jk}(u)$:

$$\nabla_i T_j(u) = \frac{\partial T_j}{\partial u^i} - \Gamma^k_{ji}(u)T_k(u), \tag{1.76}$$

где $T_j(u)$ — произвольное ковекторное поле, а $\widehat{\nabla}_i$ — оператор ковариантного дифференцирования, задаваемый аффинной связностью $\widehat{\Gamma}^i_{jk}(u) = \Gamma^i_{kj}(u)$ (аффинные связности $\widehat{\Gamma}^i_{jk}(u)$ и $\Gamma^i_{jk}(u)$ называются *взаимными*). Для симметричной аффинной связности

$\Gamma^i_{jk}(u)$ операторы ковариантного дифференцирования ∇_i и $\widehat{\nabla}_i$, как и сами взаимные связности в этом случае, совпадают.

Если скобка (1.67) является скобкой Пуассона, т.е. кососимметрична и удовлетворяет тождеству Якоби, то для любого гамильтониана вида (1.68) соответствующие системы гидродинамического типа (1.69) являются гамильтоновыми. Скобки Пуассона вида (1.67) называются *скобками Дубровина–Новикова.*

1.4. Скобки Дубровина–Новикова и риманова геометрия.

Теорема 1.1 (Дубровин, Новиков). *Если* $\det(g^{ij}(u)) \neq 0$, *то скобка (1.67) кососимметрична тогда и только тогда, когда*

1) *тензор* $g^{ij}(u)$ *симметричен, т.е. является римановой или псевдоримановой контравариантной метрикой,*

2) $b^{ij}_k(u) = -g^{is}(u)\Gamma^j_{sk}(u)$, *где* $\Gamma^j_{sk}(u)$ *— коэффициенты аффинной связности, согласованной с метрикой* $g^{ij}(u)$, *т.е.* $\nabla_k g^{ij} = 0$, *где* ∇_k *— оператор ковариантного дифференцирования, задаваемый аффинной связностью* $\Gamma^i_{sk}(u)$:

$$\nabla_k g^{ij}(u) = \frac{\partial g^{ij}}{\partial u^k} + g^{is}(u)\Gamma^j_{sk}(u) + g^{sj}(u)\Gamma^i_{sk}(u). \qquad (1.77)$$

Если $\det(g^{ij}(u)) \neq 0$, *то кососимметричная скобка (1.67) удовлетворяет тождеству Якоби тогда и только тогда, когда связность* $\Gamma^j_{sk}(u)$ *симметрична (не имеет кручения):*

$$\Gamma^i_{jk}(u) = \Gamma^i_{kj}(u), \qquad (1.78)$$

и тензор кривизны этой связности обращается в нуль:

$$R^i_{jkl}(u) = \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial u^l} + \Gamma^i_{pk}(u)\Gamma^p_{jl}(u) - \Gamma^i_{pl}(u)\Gamma^p_{jk}(u) = 0. \qquad (1.79)$$

Симметричная связность, согласованная с метрикой, порождается этой метрикой (связность Леви-Чивита метрики), т.е. связность $\Gamma^j_{sk}(u)$ является связностью Леви-Чивита метрики $g^{ij}(u)$:

$$\Gamma^i_{jk}(u) = \frac{1}{2} g^{is}(u) \left(\frac{\partial g_{sk}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{js}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^s} \right). \qquad (1.80)$$

Таким образом, метрика $g^{ij}(u)$ является плоской метрикой (метрикой нулевой римановой кривизны) и может быть приведена к постоянному виду локальной заменой координат. Таким образом, всегда существуют локальные координаты $v^i = v^i(u)$, в которых скобка Пуассона вида (1.67) постоянна и имеет вид:

$$\{v^i(x), v^j(y)\} = \varepsilon^i \delta^{ij} \delta_x(x-y),$$

где $\varepsilon^i = \pm 1$, $i = 1, \ldots, N$.

1.5. Гамильтоновы аффиноры.

Пусть $\det(g^{ij}(u)) \neq 0$. В этом случае матрица гамильтоновой системы гидродинамического типа $v^i_j(u)$ является матрицей вторых ковариантных производных плотности гамильтониана $h(u)$:

$$v^i_j(u) = g^{is}(u)\nabla_s\nabla_j h(u) = \nabla^i\nabla_j h(u), \tag{1.81}$$

где ∇_i — оператор ковариантного дифференцирования, задаваемый связностью Леви-Чивита плоской метрики $g^{ij}(u)$. Аффинор $v^i_j(u)$ называется *гамильтоновым*, если существует функция $h(u)$ и плоская метрика $g^{ij}(u)$, такие, что $v^i_j(u) = \nabla^i\nabla_j h(u)$, где ∇_i — оператор ковариантного дифференцирования, задаваемый связностью Леви-Чивита метрики $g^{ij}(u)$. Очевидно, что свойство гамильтоновости аффинора является инвариантным относительно локальных замен координат. В плоских координатах метрики $g^{ij}(u)$, т.е. в локальных координатах w^i, в которых все компоненты метрики $g^{ij}(u)$ постоянны, $\tilde{g}^{ij} = \mathrm{const}$, гамильтонов аффинор принимает вид

$$\tilde{v}^i_j(w) = \tilde{g}^{is}\frac{\partial^2 h}{\partial w^s \partial w^j}. \tag{1.82}$$

Таким образом, для данного гамильтонова аффинора и заданной соответствующей плоской метрики гамильтониан определен с точностью до прибавления произвольной линейной функции произвольных плоских координат и константы.

Лемма 1.1 (Царёв). *Аффинор $v^i_j(u)$ гамильтонов тогда и только тогда, когда существует плоская метрика $g_{ij}(u)$ такая, что*

$$g_{ik}(u)v^k_j(u) = g_{jk}(u)v^k_i(u), \tag{1.83}$$

$$\nabla_i v^k_j(u) = \nabla_j v^k_i(u), \tag{1.84}$$

где ∇_i — оператор ковариантного дифференцирования, задаваемый связностью Леви-Чивита метрики $g^{ij}(u)$.

Доказательство. Пусть аффинор $v^i_j(u)$ является гамильтоновым, т.е. существует функция $h(u)$ и плоская метрика $g^{ij}(u)$, такие, что $v^i_j(u) = \nabla^i\nabla_j h(u)$, где ∇_i — оператор ковариантного дифференцирования, задаваемый связностью Леви-Чивита метрики $g^{ij}(u)$. Тогда для плоской ковариантной метрики $g_{ij}(u)$, обратной метрике $g^{ij}(u)$, $g_{is}(u)g^{sj}(u) = \delta^j_i$, получаем

$$g_{ik}(u)v^k_j(u) = \nabla_i\nabla_j h(u) = \nabla_j\nabla_i h(u) = g_{jk}(u)v^k_i(u), \tag{1.85}$$

где использовано равенство нулю римановой кривизны метрики и соответствующей связности Леви-Чивита. Далее, $\nabla_i v^k_j(u) = \nabla_i\nabla^k\nabla_j h(u) = \nabla_j\nabla^k\nabla_i h(u) == \nabla_j v^k_i(u)$. Обратно, пусть для аффинора существует плоская метрика $g_{ij}(u)$ такая, что выполнены оба условия леммы. Тогда тензор $M_{ij}(u) = g_{is}(u)v^s_j(u)$ симметричен, $M_{ij}(u) = M_{ji}(u)$, причем в плоских координатах w^i метрики $g_{ij}(u)$ имеем

$$\frac{\partial \widetilde{M}_{jk}}{\partial w^i} = \frac{\partial \widetilde{M}_{ik}}{\partial w^j}. \tag{1.86}$$

Таким образом, локально существуют функции $N_k(u)$, $1 \le k \le N$, такие, что

$$\widetilde{M}_{ik}(w) = \frac{\partial N_k}{\partial w^i}. \qquad (1.87)$$

В силу симметрии $\widetilde{M}_{ik}(w)$ имеем

$$\frac{\partial N_k}{\partial w^i} = \frac{\partial N_i}{\partial w^k}, \qquad (1.88)$$

т.е. локально существует функция $h(w)$ такая, что

$$N_i = \frac{\partial h}{\partial w^i}. \qquad (1.89)$$

Таким образом, в плоских координатах w^i

$$\tilde{v}^i_j(w) = \tilde{g}^{is} \frac{\partial^2 h}{\partial w^s \partial w^j}, \qquad (1.90)$$

т.е. аффинор $v^i_j(u)$ гамильтонов.

Вообще говоря, у гамильтонова аффинора может существовать целый набор линейно независимых метрик нулевой римановой кривизны, удовлетворяющих условиям (1.83) и (1.84). Такие специальные гамильтоновы (точнее *бигамильтоновы* или мультигамильтоновы) аффиноры задают интегрируемые системы гидродинамического типа и представляют большой интерес. Мы рассмотрим в данном курсе очень интересную проблему классификации бигамильтоновых систем гидродинамического типа, задаваемых бигамильтоновыми аффинорами. Но, как доказано Царевым, при $N \ge 3$ для любого аффинора общего положения любые плоские метрики, удовлетворяющие условиям (1.83) и (1.84), различаются только постоянным множителем. Сформулируем точное утверждение.

Рассмотрим $\lambda_i(u)$, $1 \le i \le N$, — собственные значения (возможно комплексные) гамильтонова аффинора $v^i_j(u)$. Пусть все эти собственные значения различны в некоторой области и пусть $e_i(u)$, $1 \le i \le N$, — соответствующие им собственные вектора. Разложим по базису $e_k(u)$, $1 \le k \le N$, в каждой точке коммутатор двух собственных векторов $e_i(u)$ и $e_j(u)$:

$$[e_i(u), e_j(u)] = c^k_{ij}(u) e_k(u). \qquad (1.91)$$

Теорема 1.2 (Царёв). *Если при $N \ge 3$ для гамильтонова аффинора $v^i_j(u)$ все коэффициенты $c^k_{ij}(u)$ с попарно различными i, j, k не равны нулю, то соответствующая этому аффинору плоская метрика $g_{ij}(u)$ восстанавливается однозначно с точностью до умножения на константу.*