2. Диагонализуемые системы, инварианты Римана, тензоры Нейенхейса и Хантьеса. Тензорный критерий диагонализуемости.

2.1. Диагонализуемые системы гидродинамического типа и инварианты Римана.

Все свойства систем гидродинамического типа, которые мы изучали до сих пор, были инвариантными относительно локальных замен координат, хотя в ряде случаев нам было удобно использовать специальные выделенные локальные координаты для гамильтоновых систем гидродинамического типа — плоские координаты метрики. Некоторые важные системы гидродинамического типа обладают другими замечательными специальными выделенными локальными координатами, в которых рассматриваемая система гидродинамического типа является *диагональной*, т.е. матрица системы $v^i_j(u)$ является диагональной матрицей в каждой точке координатной окрестности. Аффинор $v^i_j(u)$ называется *диагонализуемым*, если существуют локальные координаты, в которых этот аффинор является диагональным в каждой точке координатной окрестности. Соответствующие системы гидродинамического типа также называются *диагонализуемыми*. Диагонализуемость является очевидно инвариантным свойством. Важное свойство диагонализуемости некоторых конкретных систем гидродинамического типа отмечал и эффективно использовал в своих работах еще Риман, который ввел понятие *инвариантов* — локальных координат, в которых система гидродинамического типа является диагональной. В гидродинамике и газовой динамике локальные координаты, в которых система гидродинамического типа является диагональной, играют важную роль и называются *инвариантами Римана*. Удивительно, что очень важная для приложений и абсолютно классическая задача о диагонализуемости аффинора была полностью решена только в 1955 году Хантьесом.

В более общем смысле непостоянная функция $R(u^1, ..., u^N)$ называется *инвариантом Римана* системы гидродинамического типа (1.2) (или соответствующего аффинора $v^i_j(u)$), если существует функция $\lambda(u^1, ..., u^N)$ такая, что в силу рассматриваемой системы гидродинамического типа имеем

$$R_t = \lambda(u^1, ..., u^N) R_x, \tag{2.1}$$

т.е. функция $R(u^1(x,t), ..., u^N(x,t))$ постоянна вдоль интегральных кривых уравнения

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda(u^1(x,t), ..., u^N(x,t)), \tag{2.2}$$

называемых *характеристиками* уравнения (2.1). В частности, если $R(u^1, ..., u^N)$ — инвариант Римана системы гидродинамического типа (1.2), то эта система допускает естественные $(N-1)$-компонентные редукции, определяемые соотношениями вида $R(u^1, ..., u^N) = \mathrm{const}$.

Если система гидродинамического типа (1.2) обладает набором N функционально независимых инвариантов Римана $R^i(u^1, ..., u^N)$, то они могут быть выбраны в качестве новых локальных координат $R^i = R^i(u^1, ..., u^N)$, $1 \le i \le N$, и в этих новых локальных координатах система гидродинамического типа является диагональной:

$$\begin{pmatrix} R^1 \\ R^2 \\ R^3 \\ \vdots \\ R^N \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} \lambda_1(R) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2(R) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3(R) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_N(R) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R^1 \\ R^2 \\ R^3 \\ \vdots \\ R^N \end{pmatrix}_x \tag{2.3}$$

или

$$R^i_t = \lambda_i(R^1, ..., R^N) R^i_x, \qquad 1 \le i \le N, \tag{2.4}$$

(здесь суммирования по повторяющемуся индексу i нет). В этом случае говорят, что система гидродинамического типа (и соответствующий этой системе аффинор) обладает полным набором инвариантов Римана. Диагональную систему гидродинамического типа (2.4) называют также *системой в инвариантах Римана.*

Рассмотрим условия диагонализуемости системы гидродинамического типа или, что то же самое, условия диагонализуемости произвольного аффинора. Прежде всего, отметим, что если аффинор диагонализуем, то каждому собственному значению кратности r этого аффинора отвечает r линейно независимых собственных векторов. Таким образом, необходимым условием диагонализуемости аффинора является наличие у этого аффинора r линейно независимых собственных векторов для каждого собственного значения кратности r. Этот класс аффиноров в точности характеризуется тем свойством. что существует система координат (вообще говоря, неголономная), в которой аффинор является диагональным, а именно, аффинор диагонализируется в реперах собственных векторных полей. В частности, этому классу принадлежат аффиноры, все собственные значения которых различны. Проблема состоит в описании условий на аффиноры, характеризующиеся тем свойством, что существует именно голономная система координат, в которой аффинор является диагональным.

2.2. Тензор Нейенхейса.

Введем *тензор Нейенхейса* $N^k_{ij}(u)$ произвольного аффинора $A^i_j(u)$. Определим его значения на произвольных векторных полях $X^i(u)$ и $Y^i(u)$:

$$N(X,Y) = [AX, AY] + A^2[X,Y] - A[X, AY] - A[AX, Y], \tag{2.5}$$

где $[X, Y]$ — коммутатор произвольных векторных полей X и Y:

$$[X,Y]^k(u) = X^s(u)\frac{\partial Y^k}{\partial u^s} - Y^s(u)\frac{\partial X^k}{\partial u^s}. \tag{2.6}$$

Отметим, что тензор Нейенхейса, как и коммутатор векторных полей, является векторнозначной кососимметрической 2-формой. Укажем явное выражение компонент тензора Нейенхейса через компоненты аффинора:

$$N^k_{ij}(u) = A^s_i(u)\frac{\partial A^k_j}{\partial u^s} - A^s_j(u)\frac{\partial A^k_i}{\partial u^s} + A^k_s(u)\frac{\partial A^s_i}{\partial u^j} - A^k_s(u)\frac{\partial A^s_j}{\partial u^i}. \tag{2.7}$$

Для произвольного векторного поля $X^i(u)$

$$N^k_{ij}X^i = \left(L_{A(X)}(A) - AL_X(A)\right)^k_j, \tag{2.8}$$

где L_X — производная Ли вдоль векторного поля $X^i(u)$.

Тензор Нейенхейса, играющий в настоящее время важные роли в целом ряде областей математики, в частности, в теории почти комплексных структур на многообразиях, в теориях разделения переменных, в современной теории интегрируемых систем, в теории операторов рекурсии, в теории согласованных пуассоновых структур, в схеме Ленарда–Магри, был изобретен Нейенхейсом в 1951 году именно при попытке найти критерий диагонализуемости аффинора в окрестности локальных координат. Отметим, что Нейенхейс нашел такой критерий для аффиноров с различными собственными значениями, но в недостаточно эффективной форме. Эффективный критерий, использующий тензор Нейенхейса, позднее был найден Хантьесом для всех аффиноров, у которых каждому собственному значению кратности r отвечает r линейно независимых собственных векторов. При этом Хантьес доказал, что и критерий Нейенхейса верен для всех аффиноров, у которых каждому собственному значению кратности r отвечает r линейно независимых собственных векторов.

Теорема 2.1. *Пусть $f^{ij}(u)$ — произвольная пуассонова структура, а $\omega_{ij}(u)$ — произвольная симплектическая структура. Тогда для тензора Нейенхейса $N^k_{ij}(u)$ аффинора $A^i_j(u) = f^{is}(u)\omega_{sj}(u)$ имеет место формула*

$$N^k_{ij}(u) = f^{kl}(u)\omega_{ip}(u)\omega_{jr}(u)\omega_{ls}(u)[f,\omega]^{prs}(u), \tag{2.9}$$

где $[f,\omega]^{prs}(u)$ — скобка Схоутена (1.58) двух пуассоновых бивекторов $f^{ij}(u)$ и $\omega^{ij}(u)$ (пуассонова структура $\omega^{ij}(u)$ является обратной по отношению к симплектической структуре $\omega_{ij}(u)$: $\omega^{is}(u)\omega_{sj}(u) = \delta^i_j$).

Доказательство.

$$\begin{aligned}
N^k_{ij}(u) = \quad & f^{sl}\omega_{li}\frac{\partial(f^{kr}\omega_{rj})}{\partial u^s} - f^{sl}\omega_{lj}\frac{\partial(f^{kr}\omega_{ri})}{\partial u^s} + f^{kl}\omega_{ls}\frac{\partial(f^{sr}\omega_{ri})}{\partial u^j} - f^{kl}\omega_{ls}\frac{\partial(f^{sr}\omega_{rj})}{\partial u^i} = \\
& = f^{sl}\omega_{li}\frac{\partial f^{kr}}{\partial u^s}\omega_{rj} - f^{sl}\omega_{lj}\frac{\partial f^{kr}}{\partial u^s}\omega_{ri} + f^{kl}\omega_{ls}\frac{\partial f^{sr}}{\partial u^j}\omega_{ri} - f^{kl}\omega_{ls}\frac{\partial f^{sr}}{\partial u^i}\omega_{rj} - \\
& - f^{sl}\omega_{li}f^{kr}\omega_{rp}\frac{\partial \omega^{pm}}{\partial u^s}\omega_{mj} + f^{sl}\omega_{lj}f^{kr}\omega_{rp}\frac{\partial \omega^{pm}}{\partial u^s}\omega_{mi} + \\
& + f^{kl}\omega_{ls}f^{sr}\left(\frac{\partial \omega_{ri}}{\partial u^j} + \frac{\partial \omega_{jr}}{\partial u^i}\right) = \omega_{li}\omega_{rj}\left(\frac{\partial f^{kr}}{\partial u^s}f^{sl} + \frac{\partial f^{lk}}{\partial u^s}f^{sr}\right) + \\
& + f^{kl}\omega_{ls}\frac{\partial f^{sr}}{\partial u^j}\omega_{ri} - f^{kl}\omega_{ls}\frac{\partial f^{sr}}{\partial u^i}\omega_{rj} - f^{sl}\omega_{li}f^{kr}\omega_{rp}\frac{\partial \omega^{pm}}{\partial u^s}\omega_{mj} + \\
& + f^{sl}\omega_{lj}f^{kr}\omega_{rp}\frac{\partial \omega^{pm}}{\partial u^s}\omega_{mi} + f^{kl}\omega_{ls}f^{sr}\frac{\partial \omega_{ji}}{\partial u^r} = \omega_{li}\omega_{rj}\frac{\partial f^{rl}}{\partial u^s}f^{sk} + \\
& + f^{kl}\omega_{ls}\frac{\partial f^{sr}}{\partial u^j}\omega_{ri} - f^{kl}\omega_{ls}\frac{\partial f^{sr}}{\partial u^i}\omega_{rj} - f^{sl}\omega_{li}f^{kr}\omega_{rp}\frac{\partial \omega^{pm}}{\partial u^s}\omega_{mj} +
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+f^{sl}\omega_{lj}f^{kr}\omega_{rp}\frac{\partial\omega^{pm}}{\partial u^s}\omega_{mi} - f^{kl}\omega_{ls}f^{sr}\omega_{jp}\frac{\partial\omega^{pm}}{\partial u^r}\omega_{mi} = \\
&= f^{kl}\omega_{ir}\omega_{pj}\omega_{ln}\left(\omega^{nm}\frac{\partial f^{rp}}{\partial u^m} - \omega^{mp}\frac{\partial f^{nr}}{\partial u^m} - \omega^{rm}\frac{\partial f^{np}}{\partial u^m} - \right. \\
&\left. - f^{nm}\frac{\partial\omega^{pr}}{\partial u^m} + f^{sr}\frac{\partial\omega^{nm}}{\partial u^s} - f^{sp}\frac{\partial\omega^{nr}}{\partial u^s}\right) = f^{kl}\omega_{ir}\omega_{jp}\omega_{ln}[f,\omega]^{rpn}. \qquad (2.10)
\end{aligned}
$$

В частности, если пуассоновы структуры $f^{ij}(u)$ и $\omega^{ij}(u)$ согласованы, то скобка Схоутена (1.58) двух пуассоновых бивекторов $f^{ij}(u)$ и $\omega^{ij}(u)$ тождественно равна нулю и, следовательно, тензор Нейенхейса $N^k_{ij}(u)$ аффинора $A^i_j(u) = f^{is}(u)\omega_{sj}(u)$ тождественно равен нулю. В случае, когда $f^{ij}(u)$ — невырожденная пуассонова структура, т.е. $\det(f^{ij}(u)) \neq 0$, тензор Нейенхейса $N^k_{ij}(u)$ аффинора $A^i_j(u) = f^{is}(u)\omega_{sj}(u)$ тождественно равен нулю тогда и только тогда, когда скобка Схоутена (1.58) двух пуассоновых бивекторов $f^{ij}(u)$ и $\omega^{ij}(u)$ тождественно равна нулю, т.е. тогда и только тогда, когда пуассоновы структуры $f^{ij}(u)$ и $\omega^{ij}(u)$ согласованы.

2.3. Тензор Хантьеса.

Введем *тензор Хантьеса* $H^k_{ij}(u)$ произвольного аффинора $A^i_j(u)$. Определим его значения на произвольных векторных полях $X^i(u)$ и $Y^i(u)$:

$$H(X,Y) = N(AX,AY) + A^2N(X,Y) - AN(X,AY) - AN(AX,Y). \qquad (2.11)$$

Отметим, что тензор Хантьеса образован по той же формуле, что и тензор Нейенхейса, но вместо одной векторнозначной кососимметрической 2-формы (коммутатора векторных полей) используется другая векторнозначная кососимметрическая 2-форма (тензор Нейенхейса). При этом тензор Хантьеса также является векторнозначной кососимметрической 2-формой. Укажем явное выражение компонент тензора Хантьеса через компоненты аффинора $A^i_j(u)$, используя компоненты соответствующего тензора Нейенхейса (2.7):

$$
\begin{aligned}
H^i_{jk}(u) = \quad & A^i_s(u)A^s_r(u)N^r_{jk}(u) - A^i_s(u)N^s_{rk}(u)A^r_j(u) - \\
& - A^i_s(u)N^s_{jr}(u)A^r_k(u) + N^i_{sr}(u)A^s_j(u)A^r_k(u). \qquad (2.12)
\end{aligned}
$$

2.4. Тензорный критерий диагонализуемости.

Теорема 2.2 (Хантьес). *Любой аффинор, у которого каждому собственному значению кратности r отвечает r линейно независимых собственных векторов, диагонализуем тогда и только тогда, когда тензор Хантьеса этого аффинора тождественно равен нулю.*

Докажем эту теорему для случая, когда все собственные значения аффинора $A^i_j(u)$ различны: $\lambda_i(u) \neq \lambda_j(u)$ при $i \neq j$. В этом случае собственные векторы $X_k(u)$, $1 \leq k \leq N$, $AX_k = \lambda_k X_k$, линейно независимы в каждой точке и попарные коммутаторы собственных векторных полей можно разложить по реперам, образованным этими полями:

$$[X_i, X_j](u) = c^k_{ij}(u)X_k(u). \qquad (2.13)$$

Тогда при $i \neq j$

$$H(X_i, X_j) = \sum_{k=1}^{N} (\lambda_i(u) - \lambda_k(u))^2 (\lambda_j(u) - \lambda_k(u))^2 c_{ij}^k(u) X_k(u). \tag{2.14}$$

Следовательно, в этом случае тензор Хантьеса аффинора $A_j^i(u)$ тождественно равен нулю тогда и только тогда, когда при $i \neq j$, $i \neq k$, $k \neq j$

$$c_{ij}^k(u) = 0, \tag{2.15}$$

т.е. тогда и только тогда, когда аффинор $A_j^i(u)$ диагонализуем. Действительно, аффинор $A_j^i(u)$ диагонализуем тогда и только тогда, когда для любых i, j, $i \neq j$,

$$[X_i, X_j](u) = c_{ij}^i(u) X_i(u) + c_{ij}^j(u) X_j(u) \tag{2.16}$$

(суммирования по индексам i и j нет).

2.5. Разделение переменных.

Тензор Хантьеса произвольного диагонального аффинора тождественно равен нулю. Рассмотрим тензор Нейенхейса произвольного диагонального аффинора с различными собственными значениями $\lambda_i(u)$, $\lambda_i(u) \neq \lambda_j(u)$ при $i \neq j$:

$$(A_j^i(u)) = \begin{pmatrix} \lambda_1(u) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2(u) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3(u) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_N(u) \end{pmatrix}. \tag{2.17}$$

$$N_{ij}^k(u) = \lambda_i(u) \frac{\partial \lambda_j}{\partial u^i} \delta_j^k - \lambda_j(u) \frac{\partial \lambda_i}{\partial u^j} \delta_i^k + \lambda_k(u) \frac{\partial \lambda_i}{\partial u^j} \delta_i^k - \lambda_k(u) \frac{\partial \lambda_j}{\partial u^i} \delta_j^k. \tag{2.18}$$

Если $i = j$, а также если все индексы i, j, k различны, то $N_{ij}^k(u) = 0$. Если $i \neq j$, $i = k$, то

$$N_{ij}^k(u) = (\lambda_i(u) - \lambda_j(u)) \frac{\partial \lambda_i}{\partial u^j}. \tag{2.19}$$

Аналогично, если $i \neq j$, $i = k$, то

$$N_{ij}^k(u) = (\lambda_i(u) - \lambda_j(u)) \frac{\partial \lambda_j}{\partial u^i}. \tag{2.20}$$

Следовательно, в рассматриваемом случае $N_{ij}^k = 0$ тогда и только тогда, когда переменные разделяются, т.е. при $i \neq j$

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial u^j} = 0 \tag{2.21}$$

и $\lambda_i = \lambda_i(u^i)$:

$$\begin{pmatrix} R^1 \\ R^2 \\ R^3 \\ \vdots \\ R^N \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} \lambda_1(R^1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2(R^2) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3(R^3) & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_N(R^N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R^1 \\ R^2 \\ R^3 \\ \vdots \\ R^N \end{pmatrix}_x . \qquad (2.22)$$