Исследовательские задачи к семинару "Теория пересечений и характеристические классы" М. Э. Казаряна и С. К. Ландо

За уточнением формулировок и дополнительными материалами можно обращаться к руководителям семинара.

1. *Описать алгебру производящих функций для рациональных чисел Гурвица.*

   В работе D. Zvonkine, An algebra of power series arising in the intersection theory on moduli spaces of curves and in the enumeration of ramified coverings of the sphere, 2004, показано, что экспоненциальные производящие функции для чисел Гурвица лежат в алгебре, порожденной двумя функциями:

   $$X(s) = \sum \frac{n^{n-1}}{n!} s^n, \quad Y(s) = \sum \frac{n^n}{n!} s^n.$$

   Вместе с тем, вычисления показывают, что в случае рода 0 можно ограничиться алгеброй, порожденной функцией X. Доказать это утверждение.

2. *Найти виртуальную эйлерову характеристику пространств модулей стабильных кривых с n отмеченными точками.*

   Виртуальная эйлерова характеристика пространств модулей гладких кривых с n отмеченными точками известна из работы J. Harer, D. Zagier, The Euler characteristic of the moduli space of curves, Invent. Math., 1986, 85, 457–485 (другое вычисление приведено в M. Kontsevich, Intersection theorey on the moduli space of curves and matrix Airy function, Comm. Math. Phys., 1992, 147, no. 1, 1–23). В роде 0 имеется замечательная связь между эйлеровыми характеристиками пространств модулей гладких и стабильных кривых, которая дает явное выражение для последних (E. Getzler, Operads and moduli spaces on genus 0 Riemann surfaces, In: The Moduli Spaces of Curves, Birkhäuser, Boston, 1995, 199–230). Как распространить эту связь на кривые произвольного рода?

3. *Описать стратификацию пространства тригонометрических многочленов.*

   В работе Д.А.Звонкин, С.К.Ландо, О кратностях отображения Ляшко–Лойенги на стратах дискриминанта, Функ. Ан., 1999, no. 3, 21–34, дано полное описание стратификации пространства многочленов в соответствии с их вырождениями. Появление работы М.Э.Казарян, С.К.Ландо, К теории пересечений на пространствах Гурвица, Изв. РАН, сер. матем., т. 68, no. 5, 2004, 82–113, сделало возможным получение аналогичного описания для случая тригонометрических многочленов (рациональных функций с двумя полюсами).

4. (Задачу предложил P. Zinn-Justin) *Рассмотрим в векторном пространстве* $\mathbb{C}^{2n^2}$ *пар квадратных* $n \times n$ *комплексных матриц подмногообразие коммутирующих пар* $\{(X,Y)|XY - YX = 0\}$. *Найти его степень.*

   Не исключено, что задачу можно решить методами, которые обсуждаются на семинаре. Начало последовательности степеней:

$$1, 3, 31, 1145, \ldots$$