Для изучавших математический анализ

Если Вы уже изучали математический анализ (в школе, самостоятельно и т.д.), просим Вас потратить несколько часов на решение тех задач из предлагаемого далее списка, формулировки которых Вам понятны. (Это — некоторые примеры задач средней трудности из тех, что будут разбираться на семинарах.) Мы **не предполагаем**, что Вы уже умеете решать какие-то из этих задач (а собираемся этому учить). Но если умеете, то запишите подробно их решения и принести их на занятия; это поможет нам сориентироваться при составлении курса. Если Вы сможете решить все (или почти все), то можно попробовать сдать экзамен досрочно.

Часть 1. Конкретные задачи.

1.1. Рассмотрим последовательность $x_0 = 0$; $x_{n+1} = \cos x_n$. Что больше: x_{100} или x_{101}? Что больше: $|x_{100} - x_{101}|$ или 10^{-10}?

1.2. Известно, что функция f дважды дифференцируема на всей прямой $f(0) = f(1) = 0$ и $|f''(x)| \leqslant 1$ для всех x. Чему равно максимально возможное значение $f(0{,}6)$?

1.3. Найдите сумму ряда $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$ (выяснив предварительно, при каких x он сходится).

1.4. Подберите такие константы a, b, c, чтобы предел

$$\lim_{h\to 0} \frac{af(x) + bf(x+h) + cf(x+2h)}{h^2}$$

равнялся бы $f''(x)$ для любой функции, имеющей вторую производную в x.

1.5. Найдите предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin \operatorname{tg} x - x}{x^3}.$$

1.6. Найдите предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} \sin x}{\operatorname{arctg} \arcsin x - \arcsin \operatorname{arctg} x}.$$

Часть 2. Эпсилоны и дельты

2.1. Докажите, что множество точек разрыва неубывающей функции не более чем счётно.

2.2. Будет ли функция $\sin x^2$ равномерно непрерывна на всей прямой? тот же вопрос про функцию $\operatorname{arctg} x^2$.

2.3. Докажите, что если $f(a) = 0$ и $f''(a) = 2$ для дважды дифференцируемой функции f, то точка a является локальным минимумом.

2.4. Известно, что функция $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ непрерывна на своей области определения и последовательность $f(x), f(x+1), f(x+2), \ldots$ стремится к нулю для любого $x \geqslant 0$. Следует ли отсюда, что $f(x) \to 0$ при $x \to \infty$?

2.5. Тот же вопрос, если известно, что последовательность $f(x), f(2x), f(3x), \ldots$ стремится к нулю для любого $x > 0$.

2.6. Докажите, что если последовательность дифференцируемых функций $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ равномерно сходится к непрерывной функции f, а последовательность их производных равномерно сходится к непрерывной функции g, то f дифференцируема и $f' = g$.

Часть 3. Пространства

3.1. Имеется ли счётное всюду плотное множество в пространстве непрерывных функций на квадрате (с действительными значениями)?

3.2. Какие множества могут быть множествами предельных точек для некоторой последовательности действительных чисел?

3.3. Докажите, что множество точек разрыва для любой функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ есть счётное объединение замкнутых множеств.

3.4. Покажите, что если $f\colon X \to Y$ есть взаимно однозначное непрерывное отображение топологических пространств и X компактно, то обратное отображение непрерывно. Можно ли вместо компактности X предположить компактность Y?