НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ
Парамонова И.М.
Спецкурс ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ ЛИ Осень 04
Листок 1

1) Группы $SL(2,\mathbb{C})$ и $PSL(2,\mathbb{C})$:

   а) Докажите, что группа $SL(2,\mathbb{C})$ совпадает со своим коммутантом.

   б) Найдите центр Z этой группы.

   в) Докажите, что факторгруппа $PSL(2,\mathbb{C}) = SL(2,\mathbb{C})/Z$ проста.

2) Опишите все гомоморфизмы групп Ли

   а) $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{T}^1$;

   б) $GL(2,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^*$;

   в) $GL(2,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}^*$ (как комплексных и как вещественных групп Ли).

3) Приведите пример

   а) действия группы Ли на гладком многообразии, орбиты которого не являются подмногообразиями;

   б) гомоморфизма групп Ли, образ которого не является подгруппой Ли.

4) Найдите явный матричный вид следующих групп:

$$SO(2,\mathbb{R}),\ SO(1,1),\ SU(2),\ SU(1,1).$$

5) Разложите на неприводимые представление T группы G, опишите (а в вещественном случае и нарисуйте) орбиты группы G в каждом из инвариантных подпространств:

   а) $G = SL(2,\mathbb{R})$ и $G = GL(2,\mathbb{R})$; $T = Ad$;

   б) $G = SL(2,\mathbb{R})$ и $G = GL(2,\mathbb{R})$; $T = Bil$;

   в) $G = SL(2,\mathbb{C})$ и $G = GL(2,\mathbb{C})$; $T = Herm$

6) Докажите, что

   а) группа $GL(1,\mathbb{C})$ гомотопически эквивалентна окружности;

   б) группа $SL(2,\mathbb{R})$ гомотопически эквивалентна окружности;

   в) группа $SL(2,\mathbb{C})$ гомотопически эквивалентна трехмерной сфере (в частности, односвязна).

7) Представив тело кватернионов $\mathbb{H}$ в виде двумерного комплексного пространства, опишите

   а) мультипликативную группу $\mathbb{H}^*$,

   б) мультипликативную группу кватернионов единичного модуля

   как подгруппы группы $GL(2,\mathbb{C})$.

8) Найдите размерности следующих групп Ли:

   а) $O(n)$, $SO(n)$, $SO(p,q)$;

   б) $Sp(2n)$;

   в) $U(n)$, $SU(n)$, $SU(p,q)$.

9) Для какой-нибудь из групп, перечисленных в задаче 8, докажите непосредственно по определению, что она является линейной группой Ли.

10) Найдите порядок групп $SL(2,\mathbb{F}_q)$, $PSL(2,\mathbb{F}_q)$.