**НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**
**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ**

**Парамонова И.М.**

**Спецкурс ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ ЛИ Осень 04**

Листок 2

1) Для каждого типа орбит действия $T$ группы $G$ в пространстве $X$ (см. задачу N5 листка 1) найдите стабилизатор точки и проведите соответствующее отождествление однородных пространств:

   а) $G = SL(2, \mathbb{R})$, $T = Ad$, $X$ — пространство матриц с нулевым следом.

   б) $G = SL(2, \mathbb{R})$, $T = Bil$, $X$ — пространство симметрических матриц;

   в) $G = SL(2, \mathbb{C})$, $T = Herm$, $X$ — пространство эрмитовых матриц.

2) Найдите стабилизатор точки в следующем действии и выпишите соответствующие отождествления однородных пространств:

   а) $SL(2, \mathbb{R})$ в $\mathbb{R}P^1$; $SL(2, \mathbb{C})$ в $\mathbb{C}P^1$;

   б) $SL(n+1, \mathbb{R})$ в $\mathbb{R}P^n$; $SL(n+1, \mathbb{C})$ в $\mathbb{C}P^n$;

   в) $SL(p+q, \mathbb{R})$ в $G_{p,p+q}(\mathbb{R})$; $SL(p+q, \mathbb{C})$ в $G_{p,p+q}(\mathbb{C})$.

3) Опишите явно вложение аффинной группы $GA(n)$ в группу $GL(n+1)$.

4) Каким геометрическим объектам соответствуют следующие однородные пространства:

   а) $O(p+q, \mathbb{R})/O(p, \mathbb{R}) \times O(q, \mathbb{R})$?

   б) $O(n, \mathbb{R})/O(k, \mathbb{R}),\ k < n$?

5) Докажите, что множество смежных классов $SL(2, \mathbb{R})/SO(2, \mathbb{R})$ естественно отождествляется с плоскостью Лобачевского. Что соответствует прямым на плоскости Лобачевского при этом отождествлении? Как выглядит аналогичное утверждение для смежных классов $SL(2, \mathbb{C})/SU(2)$?

6) Обозначим через $G^0$ связную компоненту единицы группы Ли $G$. Докажите, что

   а) $G^0$ является нормальной подгруппой, а прочие компоненты связности суть смежные классы по $G^0$;

   б) любая открытая подгруппа $H \subset G$ замкнута и содержит $G^0$;

   в) связная группа Ли порождается (как абстрактная группа) любой своей окрестностью единицы.

7) Найдите образ группы $G$ в представлении $T$ и примените теорему об эпиморфизме.

   а) $G = SL(2, \mathbb{R})$, $T = Ad$;

   б) $G = SL(2, \mathbb{C})$, $T = Ad$;

   в) $G = SL(2, \mathbb{R})$, $T = Bil$;

   г) $G = SL(2, \mathbb{C})$, $T = Herm$

8) Примените теорему об эпиморфизме к следующим представлениям:

   1) $T : SL(2; \mathbb{R}) \times SL(2; \mathbb{R}) \to GL(Mat(2, \mathbb{R})), \quad T(A \times B)(X) = AXB^{-1}$

   $$2)\ T : SU(2) \times SU(2) \to GL(\mathbb{H}), \quad T(p \times q)(h) = phq^{-1},$$

   где элементы группы $SU(2)$ отождествлены с кватернионами единичного модуля.

9) Докажите, что если группа Ли $G$ транзитивно действует на связном гладком многообразии $X$, то

   а) подгруппа $G^0$ также действует транзитивно на $X$;

   б) $G/G^0 \cong G_x/(G_x \cap G^0)$ для любой точки $x \in X$;

   в) если стабилизатор $G_x$ некоторой точки $x \in X$ связен, то и группа $G$ связна.

10) Докажите, что группы $SL(n)$, $SO(n)$ и $Sp(2n)$ (над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$), а также группы $U(n)$ и $SU(n)$ связны; группа $O(n)$ имеет две компоненты связности, а группа $O(p, q)$ — четыре компоненты связности.

11) Докажите изоморфизмы:

$$PSL(2, \mathbb{F}_2) \simeq S_3, \quad PSL(2, \mathbb{F}_3) \simeq A_4, \quad PSL(2, \mathbb{F}_4) \simeq A_5.$$