НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ
Парамонова И.М.
Спецкурс ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ ЛИ Осень 04
Листок 3

1) Докажите, что для линейно зависимых элементов x, y, z тождество Якоби следует из билинейности и кососимметричности, а кососимметричность эквивалентна условию $[x, x] = 0$ для любого $x \in \mathfrak{g}$, если характеристика поля отлична от 2.

2) Опишите все (с точностью до изоморфизма) алгебры Ли размерности 1, 2 и 3

   а) над полем $\mathbb{C}$; б) над полем $\mathbb{R}$.

3) Покажите, что на любой ассоциативной алгебре A операция $[x, y] = xy - yx$ задает структуру алгебры Ли.

4) Проверьте, что следующие подпространства образуют подалгебры алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$:

   а) $\mathfrak{sl}(n) := \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) \mid \mathrm{tr}(X) = 0\}$ (специальная линейная алгебра);

   б) $\mathfrak{g}_B^{Bil} := \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}) \mid XB + BX^t = 0\}$

   в) $\mathfrak{g}_B^{Herm} := \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \mid XB + B\bar{X}^t = 0\}$(вещественная подалгебра)

   г) Найдите явный матричный вид подалгебр $\mathfrak{g}_B^{Bil}$ для $B = 1_n,\ I_{p,q},\ J_{2n}$,

$$B_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ 1_n & 0 \end{pmatrix},\ B_{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1_n & 0 \\ 1_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   д) Найдите явный матричный вид подалгебр $\mathfrak{g}_B^{Herm}$ для $B = 1_n,\ I_{p,q}$.

5) (Интерпретация В.И.Арнольда тождества Якоби). Проверьте, что пространство $\mathbb{R}^3$ с векторным умножением образует вещественную алгебру Ли.

Обозначим через $\pi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}P^2$ естественную проекцию, а через $\hat{\pi}(v) \subset \mathbb{R}P^2$ — прямую, канонически двойственную точке $\pi(v)$.

Получите геометрическую интерпретацию векторного произведения, а именно:

а) опишите прямую $\hat{\pi}([v, w])$ с помощью точек $\pi(v)$ и $\pi(w)$;

б) опишите точку $\pi([v, w])$ с помощью прямых $\hat{\pi}(v)$ и $\hat{\pi}(w)$;

в) опишите прямую $\hat{\pi}([v, w])$ с помощью прямой $\hat{\pi}(v)$ и точки $\pi(w)$.

Получите геометрическую интерпретацию тождества Якоби для векторного произведения в $\mathbb{R}^3$.

6) Опишите все неприводимые конечномерные представления

а) трехмерной алгебры Гейзенберга $\mathfrak{hei}(3)$;

б) двумерной некоммутативной алгебры Ли $\mathfrak{ga}(1)$.

7) Укажите точное конечномерное представление

а) n-мерной коммутативной алгебры Ли;

б) трехмерной алгебры Гейзенберга $\mathfrak{hei}(3)$;

в) $(2n+1)$-мерной алгебры Гейзенберга $\mathfrak{hei}(2n+1)$.

8) Покажите, что пространство дифференцирований любой алгебры A образует подалгебру в алгебре Ли $\mathfrak{gl}(A)$.

9) Опишите все дифференцирования (по модулю внутренних)

а) трехмерной алгебры Гейзенберга $\mathfrak{hei}(3)$;

б) $(2n+1)$-мерной алгебры Гейзенберга $\mathfrak{hei}(2n+1)$;

в) двумерной некоммутативной алгебры Ли $\mathfrak{ga}(1)$;

г) $\mathfrak{sl}(2)$.

10) Пусть $\mathfrak{g}$ — произвольная алгебра Ли и $x \in \mathfrak{g}$. Обозначим через $\mathrm{ad}x$ линейный оператор в $\mathfrak{g}$, заданный формулой $(\mathrm{ad}x)y = [x, y]$. Докажите, что $\mathrm{ad}x$ является дифференцированием алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (внутреннее дифференцирование), а соответствие $x \mapsto \mathrm{ad}x$ является представлением $\mathfrak{g}$ в пространстве $\mathfrak{g}$, ядро которого совпадает с центром алгебры $\mathfrak{g}$. Покажите также, что пространство внутренних дифференцирований $\mathfrak{int}(\mathfrak{g})$ образуют идеал в алгебре Ли всех дифференцирований $\mathfrak{Der}(\mathfrak{g})$.