НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ
Парамонова И.М.
Спецкурс ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ ЛИ Осень 04
Листок 4

1) Алгебрами Ли каких групп Ли являются алгебры Ли задачи 4 листка 3?

2) Найдите алгебры Ли следующих групп Ли:

   а) $SO(n)$, $Sp(2n)$, $U(n)$, $SU(n)$;

   б) $B(n)$ — группа невырожденных треугольных матриц порядка n;

   в) $N(n)$ — группа треугольных матриц порядка n с единицами на главной диагонали;

   г) группа Гейзенберга $HEI(2n+1)$ — группа матриц порядка $n+2$ вида
$$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1_n & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
   где a — это строка длины n, b — столбец длины n, $c \in \mathbb{C}$, а 1_n — единичная матрица порядка n;

   д) полная аффинная группа $GA(n)$ — группа всех невырожденных аффинных преобразований n-мерного аффинного пространства S (как реализовать алгебру Ли $\mathfrak{ga}(n)$ квадратными матрицами порядка $(n+1)$?).

3) Докажите изоморфизмы следующих вещественных алгебр Ли (сравните результат с задачами 7 и 8 листка 2):

   а) $\mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}(3,\mathbb{R})$;

   б) $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \cong \mathfrak{su}(1,1) \cong \mathfrak{so}(2,1) \cong \mathfrak{sp}(2,\mathbb{R})$;

   в) $\mathfrak{so}(4,\mathbb{R}) \cong \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$;

   г) $\mathfrak{so}(2,2) \cong \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$;

   д) $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \cong \mathfrak{so}(1,3)$.

4) Докажите изморфизм $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \cong \mathfrak{so}(3,\mathbb{C})$ и выпишите его явно в матричном виде.

5) Пусть T и S — линейные представления группы Ли G в пространствах V и U соответственно, а dT и dS — их дифференциалы. Найдите дифференциалы сопряженного представления T^* и произведения $T \otimes S$.