НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ
Парамонова И.М.

Спецкурс ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ ЛИ Осень 04

Листок 5

1) Докажите, что $f(\exp\xi) = \exp df(\xi)$ для любого гомоморфизма f групп Ли.

2) Проверьте следующие свойства отображения exp:

   а) $exp : \mathfrak{hei}(2n+1) \longrightarrow HEI(2n+1)$ и $exp : \mathfrak{ga}(1) \longrightarrow GA_0(1)$ являются диффеоморфизмами;

   б) $exp\colon \mathfrak{su}(2) \to SU(2)$ не инъективно;

   в) $exp\colon \mathfrak{sl}(2;\mathbb{R}) \to SL(2;\mathbb{R})$ не сюръективно.

3) Докажите, что если G — связная коммутативная группа Ли, то exp задает эпиморфизм аддитивной группы линейного пространства $\mathfrak{g}$ на группу G.

4) Опишите все (с точностью до изоморфизма) связные коммутативные вещественные группы Ли.

5) Опишите все (с точностью до изоморфизма) связные одномерные комплексные группы Ли.

6) Докажите, что всякая связная компактная комплексная группа Ли коммутативна.

7) Найдите базисы пространств $\mathfrak{g}^L$ (левоинвариантных) и $\mathfrak{g}^R$ (правоинвариантных) векторных полей на группах Ли $G = HEI(3)$ и $GA_0(1)$, а также двойственные к ним базисы пространств Ω^L (левоинвариантных) и Ω^R (правоинвариантных) дифференциальных 1-форм. В обоих случаях проверьте, что пространства $\mathfrak{g}^L$ и $\mathfrak{g}^R$ образуют подалгебры в алгебре Ли $\mathfrak{vect}(G)$ всех векторных полей на группе Ли G, изоморфные алгебре Ли $\mathfrak{g}$, а также выполнимость уравнений Картана. Что можно сказать о коммутационных соотношениях между элементами алгебр $\mathfrak{g}^L$ и $\mathfrak{g}^R$?

8) Опишите орбиты групп Ли $G = HEI(3)$ и $GA_0(1)$ в присоединенном и коприсоединенном представлениях и вычислите форму Кириллова-Костанта на коприсоединенных орбитах.