НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ
Парамонова И.М.

Спецкурс ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ ЛИ Осень 04

Листок 6

1) Докажите следующие утверждения.

   а) Любая подалгебра и любая факторалгебра разрешимой алгебры Ли разрешима.

   б) Если идеал $\mathfrak{h}$ и факторалгебра $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ разрешимы, то $\mathfrak{g}$ — разрешима.

   в) Если $\mathfrak{u}$ и $\mathfrak{v}$ — разрешимые идеалы в $\mathfrak{g}$, то $\mathfrak{u}+\mathfrak{v}$ — разрешимый идеал в $\mathfrak{g}$.

2) Пусть $\mathfrak{g} = \oplus\mathfrak{g}_i = \mathfrak{vect}(n) = \mathfrak{der}\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]$ — алгебра Ли формальных векторных полей с естественной градуировкой: $\deg x_i = 1$.

   а) Опишите явный вид элементов $D \in \mathfrak{g}$ и компоненты $\mathfrak{g}_{-1}$ и $\mathfrak{g}_0$.

   б) Выпишите образы элементов канонического базиса e, f, h алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$ в алгебре Ли $\mathfrak{vect}(2)$. Покажите, что неприводимыми компонентами индуцированного этим вложением представления алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$ в пространстве $\mathbb{C}[x,y]$ являются подпространства однородных многочленов (Представление $\mathfrak{sl}(2)$ в пространстве однородных многочленов степени k будем обозначать L_k).

   в) Выпишите матрицы операторов, отвечающих элементам e, f, h, в мономиальном базисе L_k.

   г) Опишите явно вложение алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2) \subset \mathfrak{vect}(1)$, индуцированное действием группы $SL(2,\mathbb{C})$ на проективной прямой $\mathbb{C}P^1$.

   д) Опишите явно вложение алгебры Ли $\mathfrak{sl}(n+1) \subset \mathfrak{vect}(n)$, индуцированное действием группы $SL(n+1,\mathbb{C})$ на проективном пространстве $\mathbb{C}P^n$.

   е) Опишите явно вложение алгебры Ли $\mathfrak{sl}(p+q) \subset \mathfrak{vect}(pq)$, индуцированное действием группы $SL(p+q,\mathbb{C})$ на грассмановом многообразии $G_{p,p+q}(\mathbb{C})$.

ж) Проверьте, что формула

$$T_\lambda(D)(f) = D(f) + \lambda \operatorname{div}(D) f, \quad D \in \mathfrak{g},\ f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n],\ \lambda \in \mathbb{C},$$

задает представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в пространстве многочленов $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. При каких λ оно неприводимо?

з) Проверьте, что подпространство бездивиргентных векторных полей

$$\mathfrak{svect}(n) = \{D \in \mathfrak{vect}(n) \mid \operatorname{div}(D) = 0\}$$

образует подалгебру алгебры Ли $\mathfrak{vect}(n)$.