НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ
Парамонова И.М.
Спецкурс ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ ЛИ Осень 04
Листок 7

1) К каким классам относятся алгебры Ли $\mathfrak{hei}(2n+1)$, $\mathfrak{ga}(1)$, $\mathfrak{sl}(2)$, $\mathfrak{so}(3)$?

2) Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ удовлетворяет условию $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$. Можно ли утверждать, что $\mathfrak{g}$ полупроста?

3) Опишите все регулярные элементы алгебр Ли $\mathfrak{sl}(2)$ и $\mathfrak{ga}(1)$.

4) Для каждой из классических алгебр Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)(n \geq 2), \mathfrak{so}(n,n)(n \geq 3)$, $\mathfrak{so}(n+1,n)(n \geq 1)$ и $\mathfrak{sp}(2n), (n \geq 1)$

   а) укажите какую-нибудь (желательно наиболее простую) картановскую подалгебру $\mathfrak{h}$;

   б) найдите ранг $\mathfrak{g}$;

   в) выпишите корневое разложение и систему корней;

   г) докажите, что $\mathfrak{g}$ проста.

   Нарисуйте на плоскости системы корней алгебр Ли $\mathfrak{sl}(3)$, $\mathfrak{so}(2,2)$, $\mathfrak{so}(3,2)$ и $\mathfrak{sp}(4)$.

   Проста ли алгебра Ли $\mathfrak{so}(2,2)$?

5) Опишите все алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с одномерным коммутантом.

6) Найдите радикал аффинной алгебры Ли $\mathfrak{ga}(n)$.

7) Опишите все комплексные алгебры Ли размерности 4, не являющиеся разрешимыми.

8) Докажите, что любые две инвариантные симметрические билинейные формы на простой комплексной алгебре Ли пропорциональны, и найдите коэффициент пропорциональности между формой Картана-Киллинга и формой

$$\omega(X,Y) = \mathrm{tr} XY$$

   для алгебр Ли задачи 5. Пропорциональны ли эти формы на $\mathfrak{gl}(n)$?

9) Пусть G — группа Ли с инвариантной римановой метрикой.

   а) Докажите, что любая геодезическая, проходящая через единицу группы, является однопараметрической подгруппой, и наоборот.

   б) Докажите, что всякая геодезическая на G получается левым сдвигом из некоторой однопараметрической подгруппы.