НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ

Парамонова И.М.

Спецкурс ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ ЛИ Осень 04

Листок 8

Пусть V — это вещественное n-мерное евклидово пространство. Для любого $\alpha \in V$, $\alpha \neq 0$, обозначим через s_α отражение относительно гиперплоскости, ортогональной α:

$$s_\alpha(x) = x - \frac{2(x,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha.$$

Определение Множество Δ векторов пространства V называется *абстрактной системой корней* в V, если

- Δ конечно, не содержит 0 и порождает V;
- $s_\alpha(\Delta) = \Delta$ для любого $\alpha \in \Delta$;
- для любых $\alpha, \beta \in \Delta$ число $n_{\beta\alpha} = \dfrac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$ является целым.

Число n называется *рангом* системы корней Δ, а элементы множества Δ — *корнями.*

1) Для любых двух элементов произвольной системы корней Δ определите возможные значения угла между ними и отношения их длин.

2) Нарисуйте все системы корней ранга 1 и 2. Какие из них являются системами корней известных Вам классических алгебр Ли?

Представления алгебры $\mathfrak{sl}(2)$: продолжение

3) Разложите на неприводимые представления $S^2(T_n)$ и $\Lambda^2(T_n)$ — симметрический и внешний квадраты представления T_n. Какое из них содержит тривиальное подпредставление?

4) Докажите, что представление T_n изоморфно представлению $S^n(T_1)$.

5) Чему равен след оператора e^{tH} в представлении T_n (характер представления T_n)?

6) Найдите размерность пространства инвариантов в тензорной степени $T_1^{\otimes n}$.