**НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**
**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ**
**Парамонова И.М.**

**Спецкурс ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ ЛИ Осень 04**

Листок 9

1) Вычислите группы Вейля простых классических алгебр Ли $\mathfrak{sl}(n+1)$, $\mathfrak{so}(2n)$, $\mathfrak{so}(2n+1)$ и $\mathfrak{sp}(2n)$.

2) Рассмотрите пространство комплексных $7 \times 7$-матриц вида

$$\begin{pmatrix} a & -A(f^t) & v \\ A(v) & -a^t & -f^t \\ f & -v^t & 0 \end{pmatrix}$$

где $a \in \mathfrak{sl}(3)$, $v$ — вектор-столбец с координатами $(v_1, v_2, v_3)$, $f$ — вектор-строка, а

$$A(v) = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

Покажите, что можно так выбрать коэффициент $\alpha$, что указанное пространство образует подалгебру типа $G_2$ алгебры Ли $\mathfrak{so}(7)$.

3) Пусть $G$ — это группа линейных преобразований $n$-мерного векторного пространства над телом кватернионов, сохраняющих кватернионную эрмитову форму $(p, q) = p_1\bar{q}_1 + \dots p_n\bar{q}_n$. Докажите, что $G$ изоморфна унитарно-симплектический группе: $G \cong Sp(2n, \mathbb{C}) \cap U(2m)$.

## Представления алгебры $\mathfrak{sl}(2)$ : продолжение

4) Покажите, что в пространстве представления $T_n$ существует невырожденная $\mathfrak{sl}(2)$-инвариантная билинейная форма. Что можно сказать о ее симметричности?

5) Докажите, что представления $T_n$ и $T_n^*$ изоморфны.

6) Разложите на неприводимые представления $S^2(T_n)$ и $\Lambda^2(T_n)$ — симметрический и внешний квадраты представления $T_n$. Какое из них содержит тривиальное подпредставление?

7) Докажите, что представление $T_n$ изоморфно представлению $S^n(T_1)$.

8) Чему равен след оператора $e^{tH}$ в представлении $T_n$ (характер представления $T_n$)?

9) Найдите размерность пространства инвариантов в тензорной степени $T_1^{\otimes n}$.