НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
Домашний экзамен по курсу ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ ЛИ
(24 февраля - 2 марта)
Для получения оценки "отлично" не обязательно решить все задачи
Работа должна иметь титульный лист, на котором написаны
ФАМИЛИЯ, ИМЯ И ОТЧЕСТВО сдающего экзамен
И БОЛЕЕ НИЧЕГО НЕ НАПИСАНО
Работы сдавать в учебную часть до вечера 2 марта включительно

1. Опишите все пятимерные алгебры Ли, не являющиеся разрешимыми,

   а) над полем $\mathbb{C}$; б) над полем $\mathbb{R}$.

2. Опишите все связные вещественные пятимерные группы Ли, не являющиеся разрешимыми.

3. Разложите на неприводимые компоненты представление $S = \mathrm{ad}\circ T_n$ алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$ в пространстве $\mathfrak{gl}(n+1)$, где T_n — представление алгебры $\mathfrak{sl}(2)$ со старшим весом n, а ad — присоединенное представление алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n+1)$.

4. **Представления алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$**

   (a) Разложите на неприводимые естественное действие L алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ в пространстве многочленов от трех переменных $\mathbb{C}[x, y, z]$. Представления с какими старшими весами встречаются в этом разложении?

   (b) Выпишите явные формулы вложения $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) \subset \mathfrak{vect}(2) = \mathfrak{der}\mathbb{C}[x, y]$, индуцированного действием алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$.

   (c) Ограничьте на $\mathfrak{g}$ представление T_λ алгебры Ли $\mathfrak{vect}(2)$ в пространстве $\mathbb{C}[x, y]$, действующее по формуле

   $$T_\lambda(D)f = D(f) + \lambda \mathrm{div} D \cdot f, \text{ где } D \in \mathfrak{vect}(2),\ f \in \mathbb{C}[x, y],\ \lambda \in \mathbb{C},$$

   (обозначим это ограничение через τ_λ) и задайте треугольное разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ так, чтобы $1 \in \mathbb{C}[x, y]$ оказалась примитивным вектором.

(d) Нарисуйте на плоскости систему корней алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и весовую диаграмму представления τ_λ (множество его весов).

(e) Выясните, при каких λ представление τ_λ неприводимо. Разложимо ли τ_λ в тех случаях, когда оно приводимо?

(f) Установите связь между неприводимыми компонентами представлений L и τ_λ.