НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ

Парамонова И.М.

Спецкурс ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ ЛИ Осень 04

Зачет

1) Сформулируйте теорему об эпиморфизме групп Ли и примените ее к представлению

$$T : SU(2) \times SU(2) \to GL(\mathbb{H}), \quad T(p \times q)(h) = phq^{-1},$$

где элементы группы $SU(2)$ отождествлены с кватернионами единичного модуля. Что можно сказать о фундаментальных группах групп Ли, участвующих в данном эпиморфизме?

2) Рассмотрите группу $G = GA_0(1)$ — связную компоненту единицы группы аффинных преобразований прямой.

   а) Найдите базисы пространств $\mathfrak{g}^L$ (левоинвариантных) и $\mathfrak{g}^R$ (правоинвариантных) векторных полей на ней, а также двойственные к ним базисы пространств Ω^L (левоинвариантных) и Ω^R (правоинвариантных) дифференциальных 1-форм.

   б) Проверьте, что пространства $\mathfrak{g}^L$ и $\mathfrak{g}^R$ образуют подалгебры в алгебре Ли $\mathfrak{vect}(G)$ всех векторных полей на группе Ли G, изоморфные алгебре Ли $\mathfrak{g}$, а также выполнимость уравнений Картана.

   в) Вычислите непосредственно коммутационные соотношения между элементами алгебр $\mathfrak{g}^L$ и $\mathfrak{g}^R$ и объясните полученный результат.

3) Дайте определение присоединенного представления и опишите орбиты группы Ли $G = GA_0(1)$ в присоединенном и коприсоединенном представлениях.

4) Дайте определение радикалов алгебры Ли и группы Ли. Найдите радикал аффинной алгебры Ли $\mathfrak{ga}(n)$.

5) Что такое экспоненциальное отображение?

6) Пусть G — это группа линейных преобразований n-мерного векторного пространства над телом кватернионов, сохраняющих кватернионную эрмитову форму $(p, q) = p_1\bar{q}_1 + \ldots p_n\bar{q}_n$. Докажите, что G изоморфна унитарно-симплектический группе: $G \cong Sp(2n, \mathbb{C}) \cap U(2n)$.