Римановы поверхности, листок 1

осень 2004

1. а) Докажите, что на $\mathbb{CP}^1$ нет (ненулевых) голоморфных форм.

б) Докажите, что голоморфных форм степени > 0 нет на $\mathbb{CP}^n$ при любом n.

2. Постройте базис пространства голоморфных векторных полей на $\mathbb{CP}^1$.

3. Постройте g линейно независимых голоморфных форм на гиперэллиптической римановой поверхности рода g.

4. Покажите, что компактная риманова поверхность, на которой есть две линейно эквивалентные точки, изоморфна $\mathbb{CP}^1$.

5. Покажите, что компактная риманова поверхность рода > 1, допускающая отображение степени 2 на $\mathbb{CP}^1$, является гиперэллиптической.

6. Пусть X — компактная риманова поверхность рода g и $p_1, p_2, q_1, q_2 \in X$ — четыре различные точки. Предположим, что дивизоры p_1+p_2 и q_1+q_2 линейно эквивалентны. Сколько существует дивизоров вида $2p$, где $p \in X$, линейно эквивалентных $p_1 + p_2$?

7. Пусть для дивизора D на компактной римановой поверхности выполнены равенства $\deg D = 2$ и $l(D) = 3$. Покажите, что $X \cong \mathbb{CP}^1$.

8. Особая точка плоской кривой называется *особенностью типа* A_n, если с помощью локальной биголоморфной замены координат, переводящей эту точку в $(0;0)$, можно привести уравнение кривой к виду $z^2+w^{n+1} = 0$. Найдите род римановой поверхности, соответствующей плоской кривой степени d с единственной особой точкой, которая к тому же имеет тип A_n.

(Особенность A_1 — это знакомый нам «нод», особенность A_2 называется *каспом* (cusp), особенность A_3 — *точкой самокасания* (tacnode).)

9. Тот же вопрос, что в предыдущей задаче, но единственная особенность локально изоморфна $zw(z + w)(z + 2w) = 0$.