Римановы поверхности, листок 2

осень 2004

1. Пусть X — риманова поверхность и $p \in X$. Факторпространство $\mathcal{M}_p/\mathcal{O}_p$, где $\mathcal{O}_p$ и $\mathcal{M}_p$ — кольцо ростков голоморфных функций и поле ростков мероморфных функций соответственно, называется *пространством главных частей в точке* p. Пусть теперь X компактна, и пусть в точках $p_1, \ldots, p_n \in X$ заданы главные части $f_1, \ldots, f_n$. Покажите, что мероморфная функция на X, имеющая главную часть $\mathbf{f}_i$ в точке p_i, существует тогда и только тогда, когда для всякой голоморфной формы ω на X имеем $\sum_i \operatorname{Res}_{p_i} \mathbf{f}_i\omega = 0$.

2. Докажите, что на компактной римановой поверхности рода > 1 нет ненулевых голоморфных векторных полей.

3. По аналогии с голоморфными формами, на римановой поверхности можно определить *квадратичные дифференциалы*, записываемые в локальных координатах в виде $f(z)(dz)^2$ (все функции f голоморфны). Найдите размерность пространства квадратичных дифференциалов на компактной римановой поверхности рода g. (Указание: представьте это пространство в виде $L(D)$ для подходящего дивизора D.)

4. Покажите, что компактная риманова поверхность, соответствующая неособой плоской кривой степени > 3, не является гиперэллиптической.

5. Приведите пример компактной римановой поверхности, на которой не всякий квадратичный дифференциал представляется в виде $\sum \omega_j\eta_j$, где ω_j, η_j — голоморфные форм.

6. Опишите подмножество в $\mathbb{CP}^{g-1}$, являющееся образом гиперэллиптической римановой поверхности рода g при каноническом отображении.

7. Пусть D — дивизор на компактной римановой поверхности, $l(D) = n > 0$. Покажите, что для выбранных общим образом n точек $p_1, \ldots, p_n$ имеет место равенство $l(D - p_1 - \ldots - p_n) = 0$.

8. Пусть D_1, D_2 — дивизоры на компактной римановой поверхности, для которых $l(D_1) = n_1$, $l(D_2) = n_2$, причем $n_1, n_2 > 0$. Покажите, что $l(D_1 + D_2) \geqslant n_1 + n_2 - 1$. Может ли это неравенство быть строгим?