Римановы поверхности, листок 3

осень 2004

1. Пусть X — компактная риманова поверхность. Покажите, что можно вложить X в $\mathbb{CP}^n$ для некоторого $n > 0$ таким образом, чтобы на бесконечно удаленной гиперплоскости лежала ровно одна точка. Можно ли вложить X в $\mathbb{CP}^n$ так, чтобы на бесконечно удаленной гиперплоскости точек вообще не было?

2. Пусть X — компактная риманова поверхность, и пусть дивизор D на X обладает теми свойствами, что $0 < \deg D = \dim |D|$. Покажите, что $X \cong \mathbb{CP}^1$. (Постарайтесь не пользоваться теоремой Римана–Роха.)

3. Пусть $X \subset \mathbb{CP}^2$ — неособая кривая пятой степени и $p, q, r \in X$ — три различные точки, лежащие на одной прямой. Найдите $l(p + q + r)$.

4. Пусть D — дивизор на гиперэллиптической (и тем самым рода > 1) римановой поверхности, для которого $l(D) > 1$ и $\deg D = 3$. Докажите, что линейная система $|D|$ имеет неподвижные точки.

5. Пусть X — гиперэллиптическая риманова поверхность. Покажите, что на X существует только один, с точностью до линейной эквивалентности, дивизор D, для которого $\deg D = 2$ и $\dim D = 1$.

6. Пусть X — компактная риманова поверхность, соответствующая неособой плоской кривой степени 5.
а) Покажите, что X не является тригональной.
б) Покажите, что соответствующая X каноническая кривая не является пересечением квадрик.

7. Пусть X — компактная риманова поверхность рода 1, и пусть $p \in X$. Покажите, что группа автоморфизмов X, сохраняющих точку p, конечна. (С помощью представления эллиптических кривых в виде факторов $\mathbb{C}$ по решетке нетрудно описать и все такие X, и соответствующие группы; попробуйте, однако, сделать задачу, пользуясь только тем, что было в курсе.)