# Римановы поверхности, листок 6

осень 2004

**1.** Пусть $D_1, D_2$ — дивизоры на компактной римановой поверхности $X$. Покажите, что $\mathcal{O}_X(D_1) \otimes \mathcal{O}_X(D_2) \cong \mathcal{O}_X(D_1 + D_2)$.

**2.** В тех же условиях покажите, что $D_1$ и $D_2$ линейно эквивалентны тогда и только тогда, когда $\mathcal{O}_X(D_1) \cong \mathcal{O}_X(D_2)$.

**3.** В тех же условиях постройте естественный изоморфизм между $L(D)$ и пространством голоморфных сечений расслоения $\mathcal{O}_X(D)$.

**4.** Пусть $\mathcal{L}$ — линейное расслоение на компактной римановой поверхности $X$. Приняв без доказательства, что $\mathcal{L}$ имеет мероморфное сечение, покажите, что $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_X(D)$ для некоторого дивизора $D$.

**5.** Пусть $V$ — комплексное векторное пространство размерности $n+1$, $\mathbb{CP}^n = \mathbb{P}(V)$ — его проективизация. Через $\mathcal{O}(-1)$ обозначается линейное расслоение на $\mathbb{CP}^n$, в котором слоем над точкой является представляющая ее прямая в $V$. Пусть $X \subset \mathbb{CP}^n$ — компактная риманова поверхность; покажите, что $\mathcal{O}_X(-D) \cong i^*\mathcal{O}(-1)$ (через $i$ обозначено вложение $X$ в $\mathbb{CP}^n$).

**6.** Приведите пример комплексного пространства с решеткой, для которых не существует положительной римановой формы.

**7.** Пусть $\Gamma = \mathbb{Z}^r$ действует на абелевой группе $A$. Проверьте непосредственно, что группы $H^1(\Gamma, A)$, посчитанные с помощью комплекса Кошуля и скрещенных гомоморфизмов, изоморфны.