Представления $SL_2(\mathbb{R})$. Экзамен.

G обозначает локально компактную сепарабельную топологическую группу.

1. Пусть G абелева. Когда у нее есть неприводимые унитарные предсавления, интегрируемые с квадратом?

2. Пусть G компактна. Обозначим σ_α совокупность ее неприводимых унитарных представлений. Покажите, что

$$\cap \operatorname{Ker} \sigma_\alpha = \{e\}$$

.

4. (a) Пусть G — произвольная топологическая группа. Докажите, что существует компактная группа Σ и непрерывный морфизм $\alpha : G \to \Sigma$, такие что для любой компактной группы Σ' и любого непрерывного морфизма $\alpha' : G \to \Sigma'$ существует единственный непрерывный морфизм $\beta : \Sigma \to \Sigma'$, удовлетворяющий $\alpha' = \beta \circ \alpha$.

(b) Чему изоморфна Σ для $G = Sl_2(\mathbb{R})$?

5. Найдите какое-нибудь минимальное множество образующих для центра универсальной обертывающей $U(\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}))$.

6. Пусть L — неприводимое унитарное представление группы $Sl_2(\mathbb{R})$ с инфинитезимальным характером ξ. Пусть Ω — стандартный оператор Казимира. Покажите, что $\xi(\Omega)$ — вещественно.

7. Пусть T — регулярное представление $\mathbb{R}$ сдвигами в $L^2(\mathbb{R})$. Докажите, что

(a) Любой матричный элемент этого представления — непрерывная функция.

(б) Матричный элемент этого представления может быть любой кусочно-линейной непрерывной функцией.